



中级公共经济学讲义

基于 24 & 25 秋课程内容汇编

授课教师：俞秀梅

中南财经政法大学财政税务学院

时间：2026 年 6 月

LaTeX：江俊澄



財政稅務學院

School of Public Finance and Taxation, ZUEL

Development is about transforming the lives of people, not just transforming economies. –Joseph Stiglitz

目录

第1章 导论	1
1.1 开课初衷	1
1.2 在这门课程中需要做什么?	1
1.2.1 完成作业	1
1.2.2 阅读文献并进行展示	1
1.2.3 读书报告	1
1.2.4 尝试撰写一个公共经济学模型	1
1.3 课程将包括哪些内容?	2
1.4 期待收获什么?	2
第2章 福利经济学定理与市场失灵	3
2.1 本章结构	3
2.2 福利经济学第一定理	3
2.2.1 市场效率	3
2.2.2 帕累托最优配置: 无差异曲线	4
2.2.3 帕累托最优: 埃奇沃思盒状图	4
2.2.4 完全竞争市场	7
2.3 福利经济学第二定理	8
2.4 如何求解效用最大化问题?	9
2.5 市场效率与市场失灵	11
2.6 扩展: 福利经济学第一基本定理的一般化	11
第3章 外部性	13
3.1 定义与内涵	13
3.1.1 什么是外部性?	13
3.1.2 一些分类	13
3.2 模型例子: 解释外部性	14
3.2.1 模型设定	14
3.2.2 完全竞争市场解	14
3.2.3 社会最优解	15
3.3 纠正外部性	16
3.3.1 为何需要纠正?	16
3.3.2 外部性下的市场失灵	16
3.4 科斯定理	17
3.4.1 定义与例子	17
3.4.2 一个数学例子	17
3.5 解决方案: 征税或补贴	19
3.6 政府规制 (命令与控制)	19
3.7 排放权交易 (总量控制与交易)	20

3.8	庇古税与总量控制与交易：价格 vs. 数量	20
3.9	外部性有多大？衡量污染成本	20
第4章	公共物品	23
4.1	有效供给：萨缪尔森规则	23
4.1.1	公共物品的定义	23
4.1.2	有效供给：萨缪尔森规则 (First best: The Samuelson Rule)	23
4.1.3	私人物品的最优供给：假设 X 和 G 都是私人物品	25
4.1.4	公共物品的最优供给：假设 G 是公共物品	27
4.1.5	对萨缪尔森规则的评论	28
4.2	一个假设的市场解决方案：林达尔价格	29
4.2.1	什么是林达尔价格？	29
4.2.2	林达尔价格的一般情形	29
4.2.3	消费者优化	30
4.2.4	对林达尔价格的评论	32
4.3	克拉克机制设计	32
4.3.1	模型设定	32
4.3.2	机制描述	33
4.3.3	个体最优选择	34
4.3.4	对克拉克机制的评论	35
第5章	社会保险	36
5.1	医疗保险	36
5.1.1	期望效用理论	36
5.1.2	一个简单的医疗保险模型	37
5.1.2.1	模型设定	37
5.1.2.2	家庭会购买多少保险？	38
5.1.2.3	引入异质性	38
5.1.2.4	引入信息不对称	39
5.1.3	信息不对称下的均衡	39
5.1.4	道德风险	39
5.1.5	社会保险存在的理由：以医疗保险为例	40
5.2	养老保险	40
5.2.1	养老金体系存在的理由	40
5.2.2	养老金管理的两种主要模式	40
5.2.2.1	定义与关键特征	40
5.2.2.2	模型设定	41
5.2.3	关于现收现付制的进一步探讨	42
5.2.4	养老金与短视	43
5.2.4.1	储蓄决策：理性 vs. 短视	43
5.2.4.2	强制性养老金参与	43
5.2.5	小结	44
5.2.6	对劳动供给的影响	45

5.3	社会保险的实证研究	48
5.3.1	Wang et.al, JPubE 2024: 新农合与创业	48
5.3.2	García-Miralles & Leganza, JPubE 2024: 联合退休	49
5.3.3	Farré & González, JPubE 2019: 生育时机与后续生育	52
第 6 章	税收归宿	55
6.1	局部均衡	55
6.1.1	税收归宿	55
6.1.2	局部均衡分析	55
6.1.2.1	局部均衡的一般情形	57
6.1.2.2	税收归宿与价格弹性的关系	57
6.1.3	税收归宿的实证研究: Doyle & Sampatharank (2008)	58
6.1.4	其他文献	62
6.2	一般均衡	63
6.2.1	一般均衡分析	63
6.2.2	对要素征税	64
6.2.3	求解均衡	65
6.2.3.1	效用最大化	65
6.2.3.2	厂商利润最大化	66
6.2.3.3	厂商利润最大化	66
6.2.3.4	生产函数设定	67
6.2.4	一般均衡的具体函数形式	67
6.2.5	税收归宿	68
6.2.5.1	探讨税收归宿: 价格变化	70
6.2.5.2	探讨税收归宿: 效用变化	70
6.2.5.3	探讨税收归宿: 工人和资本所有者的效用	71
第 7 章	最优税收	72
7.1	税收的超额负担	72
7.1.1	衡量超额负担的社会福利方法	72
7.1.1.1	模型设定	72
7.1.2	等价性变化 (EV) 与补偿性变化 (CV)	76
7.1.2.1	对先前问题的解答	76
7.1.2.2	衡量超额负担: 模型设定	77
7.1.2.3	衡量超额负担: 图形解法	78
7.1.3	超额负担的另一种视角: 回顾福利定理	82
7.2	最优税收	83
7.2.1	基本概念	83
7.2.2	Ramsey 最优税收: 模型设定	83
7.2.3	逆弹性法则的局限性	86
7.2.4	特殊情形: 两种产品	87
附录 A	习题集	89

第 A 章 练习	89
附录 B 基本数学工具	92
B.1 拉格朗日方法在经济学优化中的应用	92
B.1.1 无约束优化回顾	92
B.1.2 等式约束下的拉格朗日方法	92
B.1.3 多个等式约束	93
B.1.4 不等式约束与库恩-塔克条件	93
B.2 线性回归模型中的系数解释	94
B.2.1 水平-水平模型 (Level-Level)	94
B.2.2 对数-水平模型 (Log-Level)	94
B.2.3 水平-对数模型 (Level-Log)	95
B.2.4 对数-对数模型 (Log-Log)	95
B.2.5 总结与对照表	95
B.2.6 注意事项与示例	95
B.3 隐函数求导	96
B.3.1 单方程情形	96
B.3.2 多变量情形	96
B.3.3 示例: 税收归宿中的隐函数求导	96
B.4 求和算子与描述统计量	97
B.4.1 求和算子的基本性质	97
B.4.2 样本均值 (Sample Mean)	97
B.4.3 样本方差与标准差	97
B.4.4 样本协方差与相关系数	98
B.4.5 双重求和与交叉项	98
B.4.6 应用示例: 简单线性回归中的求和算子	98
B.5 柯布-道格拉斯函数	98
B.5.1 定义	98
B.5.2 基本性质	99
B.5.3 应用示例: 效用最大化与需求函数	100

第1章 导论

1.1 开课初衷

为什么需要学习中级公共经济学？在学习了《财政学原理》之后，仍然存在许多问题，例如：

- 看不见的手是如何在市场中发挥作用的？
福利经济学第一定理！
- 财政的职能之一是资源配置，其中提供公共产品和矫正外部性是重要的职能，那么政府应该如何做？
公共产品的最优供给量。
纠正外部性的几种方法及其区别。
- 如何解释超额负担和替代效应？
EV（等价变化）和 CV（补偿变化）用于衡量超额负担。

因此，中级公共经济学这门课实质上是对《财政学原理》所学内容进行拔高。

1.2 在这门课程中需要做什么？

为了更好地理解这门课程，你应该：

1.2.1 完成作业

若干需要计算的经济学问题（可参见附录）；作业未交或迟交不会得分。

1.2.2 阅读文献并进行展示

参考提供的阅读文献清单，可以组队阅读并报名进行展示。每篇论文汇报时间 30 分钟以内，PPT 控制在 30 页以内。自己读懂全篇论文，但注重报告论文的核心内容。

- 详讲：背景（政策背景、理论背景）、方法（包括数据来源、识别策略、变量构造）、结论（展示基准回归结果、机制分析）
- 可适当略讲：稳健性检验，异质性分析等

1.2.3 读书报告

在本 PPT 末尾的文献列表中自选（与论文汇报的文献是一样的）。中英文均可，中文则 2000 字以上，英文则 1000 字以上。禁止抄袭，若发现抄袭（论文原文、同学读书报告、公众号推文），将被记为 0 分。

1.2.4 尝试撰写一个公共经济学模型

自选研究主题，尝试基于现有模型进行撰写（如资本减税对劳动收入份额的影响）。包含三部分：模型设定、模型推导、基本结论及直觉解释。需要注重理解背后的机制，选题及模型均可参考文献。

1.3 课程将包括哪些内容？

16 次课，2 学分，课程预期安排如下：

一、公共经济学基础理论（2 周）

- 导论
 - 福利经济学定理与市场失灵
- 二、公共支出理论和政策（6 周）
- 公共产品（1 周）
 - 外部性（1 周）
 - 论文汇报 A（1 周）（3 个小组）
 - 社会保障（2 周）
 - 论文汇报 B（1 周）（3 个小组）

三、税收理论和政策（7 周）

- 税收归宿（4 周）
 - 局部均衡
 - 论文汇报 C（1 周）（3 个小组）
 - 一般均衡
 - 最优税收（2 周）
 - 最优商品税
 - 最优所得税
- 四、财政政策与财政乘数（机动，看课程进度）
- 五、复习（1 周）

1.4 期待收获什么？

- 经济学理论功底
- 经济学学术思维
- 练习与解题技能
- 报告论文的能力
- 高分（靠自己努力!）

第 2 章 福利经济学定理与市场失灵

内容提要

- ☐ 福利经济学第一定理
- ☐ 福利经济学第二定理
- ☐ 帕累托最优
- ☐ 帕累托改进

2.1 本章结构

本章主要介绍福利经济学与市场失灵的相关理论。从市场的角度出发，如下思维导图有助于学习本章内容：

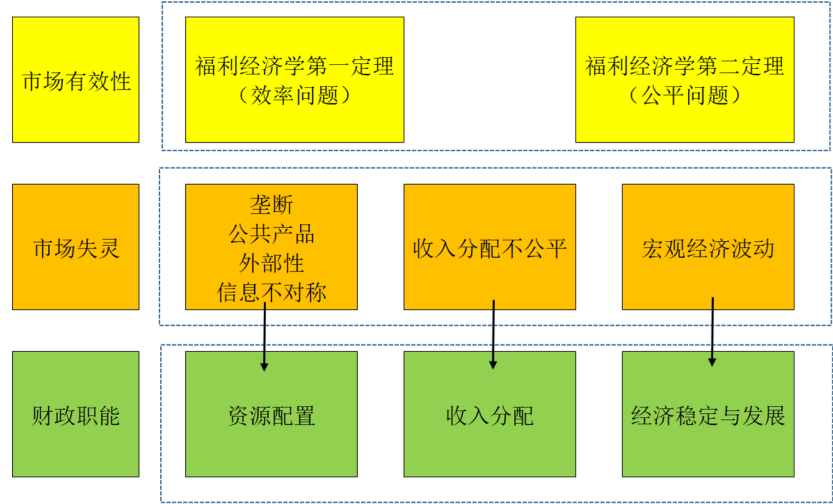


图 2.1: 本章结构

2.2 福利经济学第一定理

定理 2.1 (福利经济学第一定理)

完全竞争的市场条件会自动产生资源配置的帕累托最优状态。



2.2.1 市场效率

定义 2.1 (如何定义效率?)

- 帕累托改进：资源配置的变动至少使一个人的福利变好，同时不损害任何人。
- 帕累托最优：在不使任何人状况变差的前提下，已无法让任何人的状况变得更好。因此，也就是不存在帕累托改进余地的资源配置状态。



2.2.2 帕累托最优配置：无差异曲线

简单说，无差异曲线上的每一点都代表相同的效用水平。

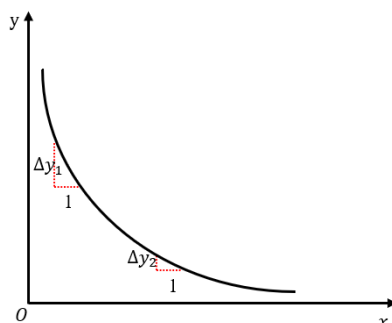


图 2.2: 无差异曲线

- 当消费的 x 数量很少时，消费者愿意为多消费一单位 x 而放弃 Δy_1 单位的 y 。
- 当消费的 x 数量很多时，消费者只愿意为多消费一单位 x 而放弃 Δy_2 单位的 y 。
- $\Delta y_2 < \Delta y_1$ ：无差异曲线凸向原点。

边际替代率：无差异曲线斜率的绝对值。

随着 x 增加，边际替代率递减。因此可得：

$$MRS = |\text{无差异曲线的斜率}| = \frac{x \text{ 的边际效用}}{y \text{ 的边际效用}} = \frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y)}$$

练习 2.1 假设多消费 1 单位 X 增加效用 2，多消费 1 单位 Y 增加效用 6。消费者为多获得一单位 X，愿意放弃多少单位 Y？

解 边际替代率 = X 的边际效用 / Y 的边际效用 = 2/6

2.2.3 帕累托最优：埃奇沃思盒状图

一种用于刻画两个个体在给定偏好、初始禀赋和两种商品消费下交易潜在结果的工具。它是一个方形盒子，展现了两种商品在两人之间所有可能的分配。盒子的横轴和纵轴分别量度两种商品的总量，各自对应一个个体。

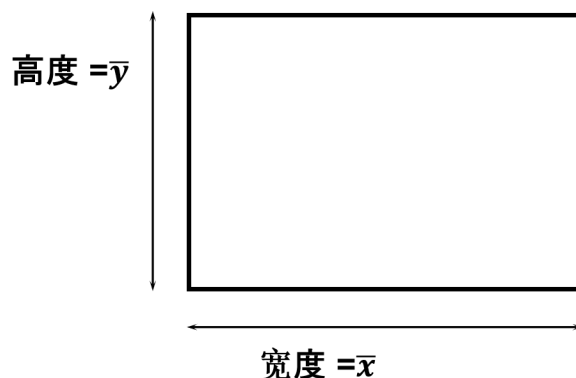


图 2.3: 埃奇沃思盒 (Edgeworth Box)

盒中任意一点代表个体的初始禀赋，其中绘制的无差异曲线给出了使个体获得同等满足程度的商品组合。

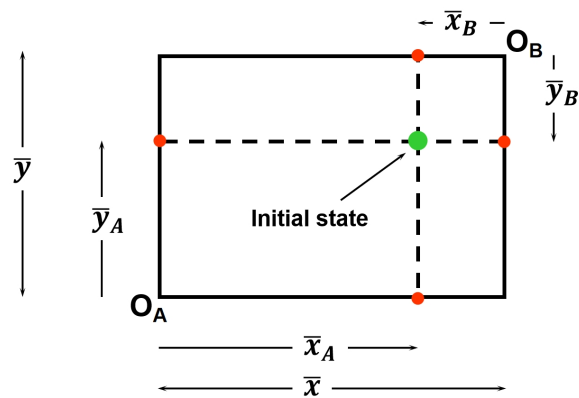


图 2.4: 初始状态

对于两个独立个体 A 和 B，将他们的无差异曲线置于埃奇沃思盒状图中，如图所示。我们可以分别比较两人的效用。

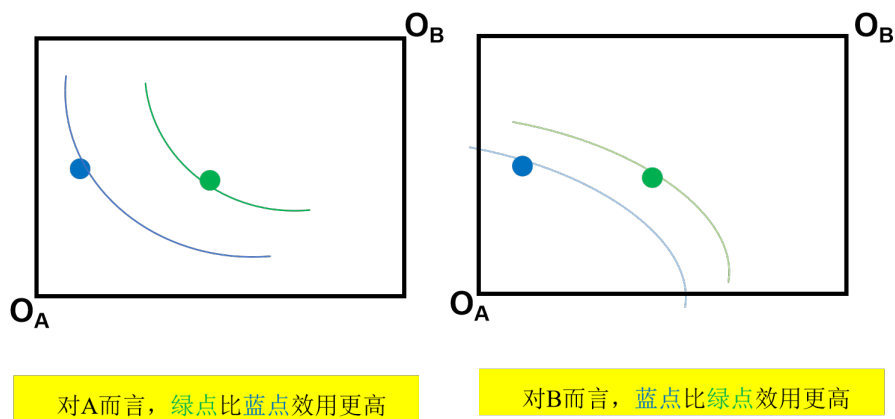


图 2.5: 比较两点的效用

更进一步，我们还可以将两人的无差异曲线画在同一张图上，并思考某个可选配置是否存在帕累托改进的可能。如果存在，图中区域 1 至 5 里哪一区域能让两人都获得更高的效用？要解决这个问题，可以比较各区域内无差异曲线所代表的效用大小。那些效用更高的区域，就是我们要找的。

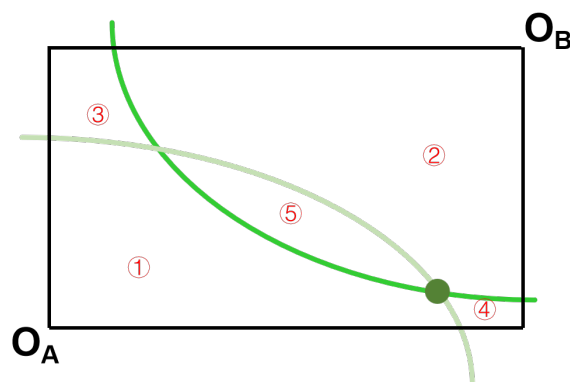


图 2.6: 可选配置

我们先以 A 为分析对象（B 的分析对称）。对 A 而言，区域 2 和 5 是其效用能够提升的区域，因为这两个区域中

的无差异曲线代表了更高的效用水平。而区域 1、3、4 则代表着更低的效用。类似地，区域 1 和 5 是 B 效用能够提升的区域。由此，我们就可以得出**帕累托改进集**。

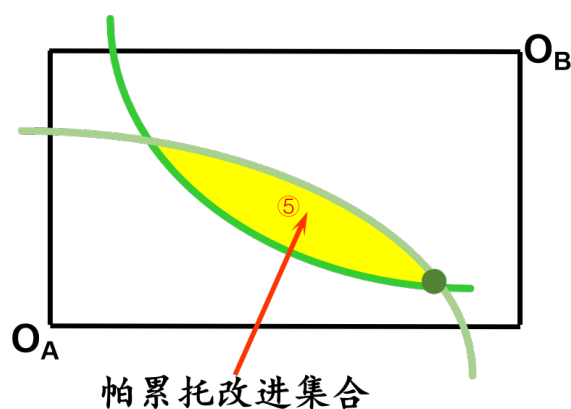


图 2.7: 帕累托改进集

若两个个体同时不断提高各自的效用，最终的帕累托改进集将变成空集，这便意味着达到了**帕累托最优**，且无法继续作出改进。

从局部特征观察，达到帕累托最优时，两人的无差异曲线恰好相切。同时，结合上一节边际替代率的公式，不难推出：

命题 2.1

帕累托最优时，两人的边际替代率也彼此相等

不妨设想一下，若边际替代率不相等，那么对于两个可以自由交换商品的人来说，相互交换总能让双方都变得更好。这实际上就是在进行帕累托改进，意味着尚未达到帕累托最优。

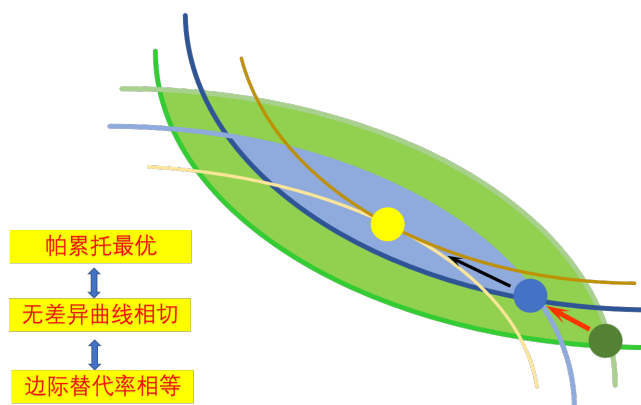


图 2.8: 帕累托最优

我们可以举一个日常例子，来更直观地理解边际替代率不一致的情形。

练习 2.2 A 认为 1 个汉堡值 6 个面包。B 认为 1 个汉堡值 3 个面包。可以进行交换，例如：A 用 4 个面包与 B 交换 1 个汉堡。

解 A 获得 1 个汉堡（相当于 6 个面包），失去 4 个面包，净赚 2 个面包。B 得到 4 个面包，失去 1 个汉堡（相当于 3 个面包），相当于净赚 1 个面包。

两人的状况都变得更好了，也就是实现了帕累托改进。

2.2.4 完全竞争市场

在完全竞争市场中，A 和 B 都是**价格接受者**。
也就是说，给定价格 P_x 和 P_y ，他们选择最适合的消费组合 $\{x_A, y_A\}$ 、 $\{x_B, y_B\}$ 以最大化自身效用。
A 的效用最大化问题为：

$$\begin{aligned} \max & u(x_A, y_A) \\ \text{s.t.} & P_x x_A + P_y y_A = P_x \bar{x}_A + P_y \bar{y}_A \end{aligned}$$

其中左边代表支出，右边代表收入。

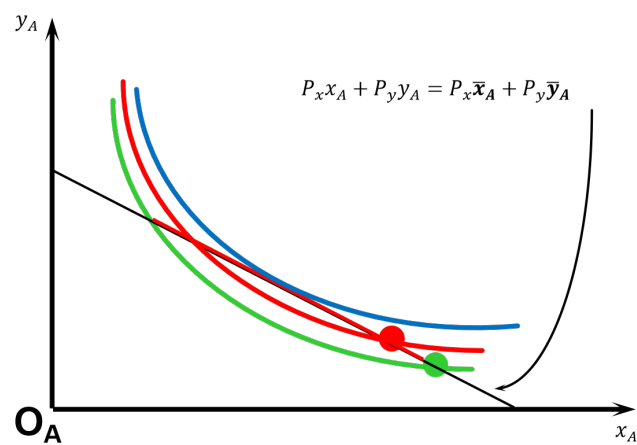


图 2.9: A 的效用最大化

找到无差异曲线与预算约束线相切的位置，并在该点进行代数求解。

完全竞争市场

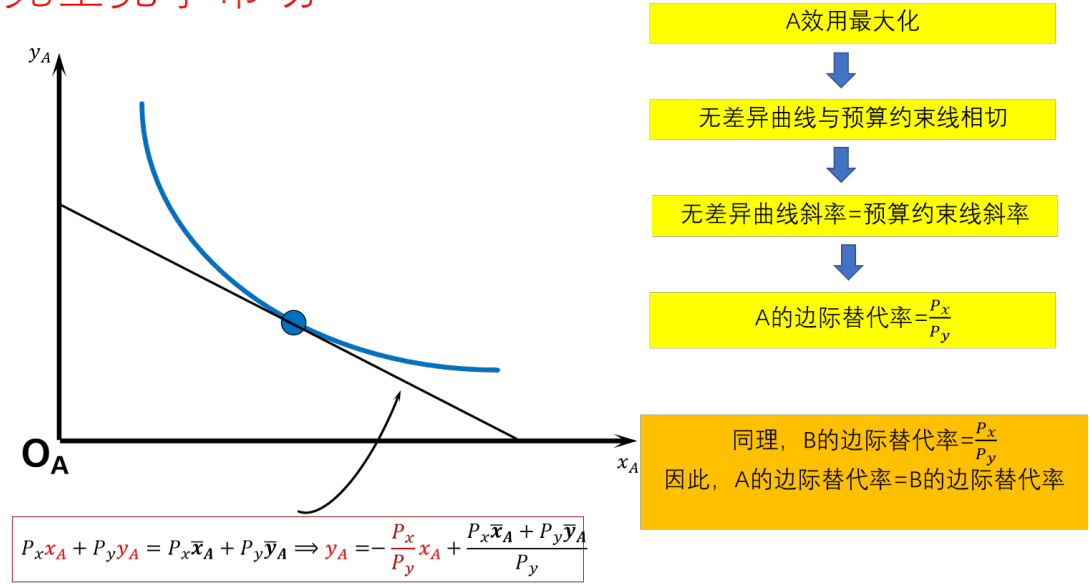


图 2.10: 相切情形

简要总结，我们可以找出上述概念之间的关系，并梳理成下图：

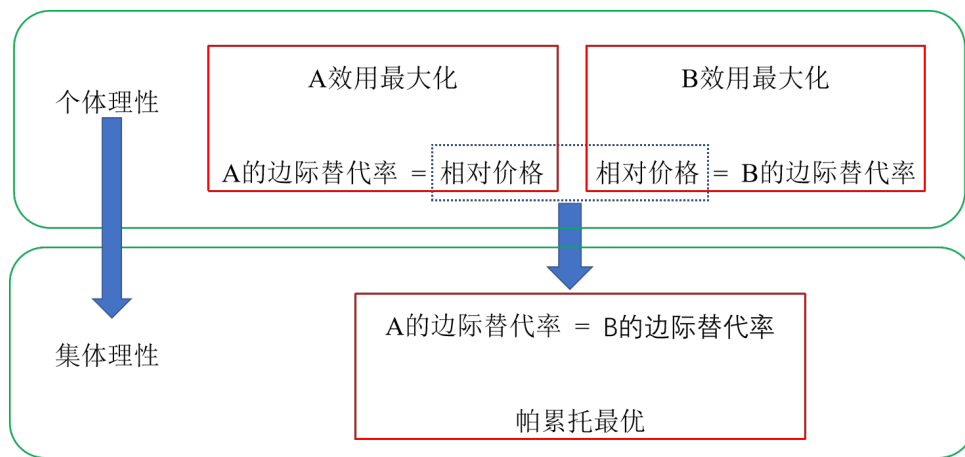


图 2.11: 概念关系

由帕累托最优配置与完全竞争市场的关系可以推知：

命题 2.2

完全竞争市场中的资源配置是帕累托最优的。

2.3 福利经济学第二定理

A 和 B 都位于契约曲线上，且都是帕累托最优，那么哪一个更公平？如何将配置结果从 a 点改变到 b 点：

- 改变初始配置（着眼于公平）
- 让市场发挥作用（着眼于效率）

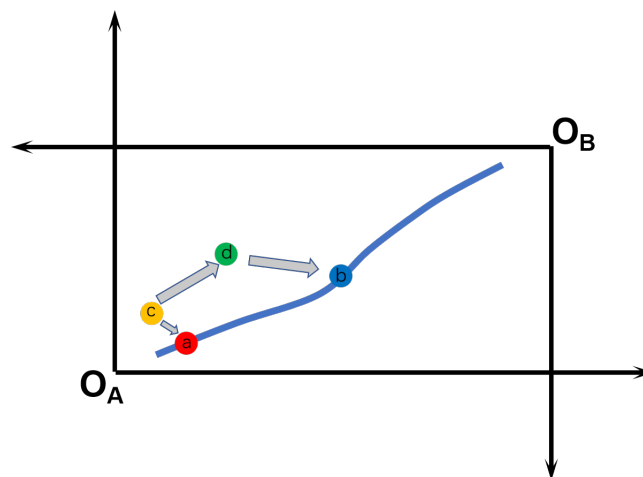


图 2.12: 改变配置

定理 2.2 (福利经济学第二基本定理)

若每个消费者都具有凸偏好，每个厂商都具有凸的生产可能集，则任何帕累托有效配置都可以通过竞争均衡来实现。

或者说，在完全竞争市场下，契约线上所有可能实现的帕累托最优点，都是可以通过对资源进行适当的再分配而达到的。

福利经济学第二定理相比第一定理有某种优势。它阐明了，只要所有消费者偏好为凸且所有厂商的生产可能性集为凸，帕累托有效配置就能够实现。一套完备的竞争性市场所形成的均衡，恰好适合用于对初始禀赋进行再分配。

分析：

- 资源的初始分配决定了资源的最终分配。
- 公平与效率可以分开考虑。
 - 政府调整资源的初始分配，以实现公平。
 - 市场的“看不见的手”则实现效率。

2.4 如何求解效用最大化问题？

要解决效用最大化问题，需要遵循这样一条规则：若消费者想使总效用最大化，那么他花出的每一块钱，都应该用在能带来最大边际效用每块钱的商品上。

下面是一个分步数学推导的例子。

$$\max_{x_A, y_A} u(x_A, y_A) = x_A^\alpha y_A^\beta$$

s.t.

$$P_x x_A + P_y y_A = P_x \bar{x}_A + P_y \bar{y}_A \equiv I_A$$

由预算约束可得：

$$y_A = \frac{I_A - P_x x_A}{P_y}$$

代入效用函数：

$$u(x_A, y_A) = x_A^\alpha \left(\frac{I_A - P_x x_A}{P_y} \right)^\beta$$

对 x_A 求一阶导数：

$$\alpha x_A^{\alpha-1} \left(\frac{I_A - P_x x_A}{P_y} \right)^\beta - x_A^\alpha \beta \left(\frac{I_A - P_x x_A}{P_y} \right)^{\beta-1} \frac{P_x}{P_y} = 0$$

化简得：

$$\alpha \left(\frac{I_A - P_x x_A}{P_y} \right) = \beta \frac{P_x}{P_y} x_A$$

即：

$$P_x x_A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} I_A$$

结论：当效用函数取 $x_A^\alpha y_A^\beta$ 形式时，消费者会将其收入的 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ 部分用于消费 x_A ， $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ 部分用于消费 y_A 。（这一结果可直接用于课程作业或考试，但需明确给出消费者效用最大化问题。）

福利经济学第一基本定理的代数版本：市场解

- 给定 P_x, P_y , A 解效用最大化问题, 得到:

$$x_A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_A + P_y \bar{y}_A}{P_x}, \quad y_A = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_A + P_y \bar{y}_A}{P_y} \quad (1)$$

- 给定 P_x, P_y , B 解效用最大化问题, 得到:

$$x_B = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_B + P_y \bar{y}_B}{P_x}, \quad y_B = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_B + P_y \bar{y}_B}{P_y} \quad (2)$$

- 利用市场出清条件 $x_A + x_B = \bar{x}_A + \bar{x}_B$ 求解价格, 即:

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_A + P_y \bar{y}_A}{P_x} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{P_x \bar{x}_B + P_y \bar{y}_B}{P_x} = \bar{x}_A + \bar{x}_B$$

可解得相对价格为:

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

将此相对价格代入 (1)、(2) 式, 即得完全竞争下的配置。

福利经济学第一基本定理的代数版本：帕累托最优解

帕累托最优解满足:

$$\begin{aligned} \max_{x_A, y_A, x_B, y_B} \quad & \alpha_1 u(x_A, y_A) + \alpha_2 u(x_B, y_B) \\ \text{s.t.} \quad & x_A + x_B = \bar{x}, \quad y_A + y_B = \bar{y} \end{aligned}$$

拉格朗日方程¹为:

$$\mathcal{L} = \alpha_1 u(x_A, y_A) + \alpha_2 u(x_B, y_B) + \lambda_1 (\bar{x} - x_A - x_B) + \lambda_2 (\bar{y} - y_A - y_B)$$

一阶条件:

$$(x_A): \quad \alpha_1 MU_A^x = \lambda_1$$

$$(y_A): \quad \alpha_1 MU_A^y = \lambda_2$$

$$(x_B): \quad \alpha_2 MU_B^x = \lambda_1$$

$$(y_B): \quad \alpha_2 MU_B^y = \lambda_2$$

因此, 两人的边际替代率相等:

$$\frac{MU_A^x}{MU_A^y} = \frac{MU_B^x}{MU_B^y} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

边际替代率 =

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{\beta x^\alpha y^{\beta-1}} = \frac{\alpha y}{\beta x}$$

在帕累托最优处, A 和 B 的边际替代率相等, 即:

$$\frac{\alpha y_A}{\beta x_A} = \frac{\alpha y_B}{\beta x_B}$$

¹对拉格朗日方法求解优化问题的介绍可参见数学附录。

结合资源约束 $x_A + x_B = \bar{x}$, $y_A + y_B = \bar{y}$, 可得契约曲线:

$$y_A = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} x_A$$

2.5 市场效率与市场失灵

完全竞争市场需要在特定条件下运行才能达到效率: 消费者和生产者皆为价格接受者, 市场参与者(生产者和消费者)众多, 产品同质, 资源能充分流动, 且所有主体都拥有完全信息。

然而, 当这些条件得不到满足时, 就会出现市场失灵。常见的市场失灵根源包括: 公共物品、外部性、信息不对称、垄断力量、收入分配不均以及宏观经济波动。

2.6 扩展: 福利经济学第一基本定理的一般化

考虑一个完全竞争的纯交换经济, 有 m 个代表性参与者和 n 种商品。第 i 个参与者的初始禀赋为 $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i, \dots, \bar{x}_n^i)$ 。我们要证明, 在这样的经济中, 完全竞争市场均衡始终是帕累托最优的。

记号

令

$$\bar{x}_j = \bar{x}_j^1 + \bar{x}_j^2 + \dots + \bar{x}_j^m$$

表示经济中第 j 种商品的总量。再令 x_j^i 表示消费者 i 消费第 j 种商品的数量。

帕累托最优解

帕累托最优配置通过求解以下优化问题得到:

$$\max \alpha_1 U(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) + \alpha_2 U(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2) + \dots + \alpha_m U(x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$$

满足资源约束:

$$x_1^1 + x_1^2 + \dots + x_1^m = \bar{x}_1$$

$$x_2^1 + x_2^2 + \dots + x_2^m = \bar{x}_2$$

$$\vdots$$

$$x_n^1 + x_n^2 + \dots + x_n^m = \bar{x}_n$$

拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \alpha_1 U(x_1^1, \dots, x_n^1) + \alpha_2 U(x_1^2, \dots, x_n^2) + \dots + \alpha_m U(x_1^m, \dots, x_n^m) \\ & + \lambda_1 (\bar{x}_1 - x_1^1 - x_1^2 - \dots - x_1^m) \\ & + \lambda_2 (\bar{x}_2 - x_2^1 - x_2^2 - \dots - x_2^m) \\ & + \dots \\ & + \lambda_n (\bar{x}_n - x_n^1 - x_n^2 - \dots - x_n^m) \end{aligned}$$

一阶条件

对于消费者 1:

$$\alpha_1 MU_1^1 = \lambda_1, \quad \alpha_1 MU_2^1 = \lambda_2, \quad \dots, \quad \alpha_1 MU_n^1 = \lambda_n$$

对于消费者 i :

$$\alpha_i MU_1^i = \lambda_1, \quad \alpha_i MU_2^i = \lambda_2, \quad \dots, \quad \alpha_i MU_n^i = \lambda_n$$

由此，帕累托最优的条件是：

$$MRS_{j1}^1 = MRS_{j1}^2 = \dots = MRS_{j1}^m, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

即，任意两种商品间的边际替代率在所有消费者之间均相等。

竞争市场解

给定价格，消费者 i 的效用最大化问题为：

$$\begin{aligned} \max & U(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n P_j x_j^i = I^i \end{aligned}$$

拉格朗日函数：

$$\mathcal{L} = U(x_1^i, \dots, x_n^i) + \theta_i \left(I^i - \sum_{j=1}^n P_j x_j^i \right)$$

一阶条件：

$$MU_j^i = \theta_i P_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

因此，在市场均衡中有：

$$MRS_{j1}^i = \frac{MU_j^i}{MU_1^i} = \frac{P_j}{P_1}, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

由于所有消费者面对的是同一组价格，从而有：

$$MRS_{j1}^1 = MRS_{j1}^2 = \dots = MRS_{j1}^m = \frac{P_j}{P_1}$$

这恰好与帕累托最优的条件完全吻合。因此，竞争市场均衡是帕累托最优的。

第3章 外部性

内容提要

□ 外部性及矫正

□ 科斯定理

本章将对外部性进行分类，介绍科斯定理——它揭示了在零交易成本下私人协商如何达成效率，并考察各种纠正政策。最后，我们会通过一篇发表在经济学顶刊 *Journal of Political Economy* (JPE) 上的实证研究回顾本章内容，该研究估计了一项重大环境外部性的福利后果。

3.1 定义与内涵

定义 3.1 (外部性 (Externality))

外部性指的是某一方的行为对未直接参与该经济交易的第三方造成的影响。也可以说，是私人成本与社会成本、或私人收益与社会收益之间的不一致



3.1.1 什么是外部性？

我们先设定两种情形，看看哪种外部性才需要纠正。

情形 3.1 (金钱外部性 (Pecuniary Externality))

假设市场上汽油价格上涨，个体 A 正考虑购买一辆新能源电动汽车。然而，由于其他市场参与者也有类似想法，推高了电车的需求，导致其价格也跟着上涨。结果，其他人的购买行为给 A 造成了经济损失。实际上，这种外部性是通过市场机制中的价格信号传递的，因此并不构成需要纠正的问题。



情形 3.2 (非金钱外部性 (Non-Pecuniary Externality))

另一种外部性是指一个人的行为直接影响到另一个人的效用或生产。例如，工厂排放的废气会直接影响附近居民的健康。

与前一种不同，这类外部性并非通过市场机制传递，或者说，在这里市场机制是缺失的。



显然，非金钱外部性才是我们要关注的重点。我们可以定义为：**外部性是由一方造成的、却由另一方在经济上承担或享有的成本或收益**。外部性可以是负的，也可以是正的。负外部性是一方间接加给另一方的成本。正外部性则是一方因另一方的行为而间接获得的收益。

3.1.2 一些分类

外部性可以从两个维度进行划分。第一，根据副作用是改善还是损害了外部方的利益，可区分为好的或坏的外部性，即正外部性或负外部性。第二，根据外部性的产生方式，通常分为生产外部性或消费外部性。

负外部性

大多数外部性都是负的。污染就是众所周知的负外部性。一家公司可能为了削减成本、增加利润，转而采用对环境危害更大的新运营方式。公司承担了扩大运营的成本，却也获得了高于成本的回报。

然而，这种外部性同时也增加了经济与社会的总成本，使之成为负外部性。当社会成本超过私人成本时，外部性就是负的。

正外部性

有些外部性是正的。当私人层面和社会层面都获得正向收益时，正外部性就发生了。企业进行的研发 (R&D) 就可以是一种正外部性。研发既增加了公司的私人利润，同时还具有提升社会整体知识水平的额外好处。

同样，对教育的重视也是一种正外部性。投资教育能造就一支更聪明、更具才智的劳动力队伍。公司能从雇佣受过良好教育的员工中获益，因为他们知识丰富。这对雇主有利，因为一支受过更好教育的劳动力队伍，所需的员工培训与开发成本更低。

生产外部性

生产外部性是指工业运营产生副作用的情形。这是最常被用作例子的外部性类型，因为不难想象一家化工企业因不当存储化学品而造成环境灾难的场景。正是由于公司生产产品或处理废弃物的方式，导致了外部性的发生。

消费外部性

外部性也可能因消费者使用资源的时间或方式而产生。想想你上班通勤的例子。那些选择开车的人，因驾驶私家车而制造了污染外部性。那些选择乘坐公共交通或步行的人，则没有造成同样的外部性。这里，副作用并非源自生产过程，而是因消费某件物品而引起的。

3.2 模型例子：解释外部性

3.2.1 模型设定

我们分别从消费者和厂商的角度建立如下模型：

考虑两种商品：

- x 代表汽车数量， y 代表对所有其他商品的消费。
- 令 y 为计价物，即 y 的价格为 1，而 x 的价格为 p 。

对于一个拥有 1 单位收入的代表性消费者，其效用函数为：

$$u(x) + y - dX$$

这是一个拟线性效用函数，其中：

- d 是每生产一辆汽车因污染而产生的负效用，使消费者的效用减少 d 单位。
- X 是全社会汽车的总产量。

在均衡时，有 $x = X$ ，但消费者个人无法选择 X ； X 是由社会上所有消费者共同决定的。

- 消费者的收入为 I 。

对于生产厂商：

- 生产汽车的成本为 $c(X)$ 。

在这样的设定下，消费者的效用受到社会汽车总产量的影响，而他自己无法直接控制这一总量。这就将一种外部性引入了消费者的效用函数：汽车生产带来的污染影响了他的福利，却并未反映在他为汽车所支付的价格里。

3.2.2 完全竞争市场解

我们将上述设定转化为如下的经济学模型形式。

消费者效用最大化：

$$\max U(x) + y - dX$$

$$\text{s.t. } px + y = I$$

也就是，最大化： $u(x) + I - px - dX$ （当然，你也可建立拉格朗日函数来解此题。但函数形式简单，我们直接用代入法即可。）

一阶条件：

$$u'(x) = p$$

生产者利润最大化：

$$\max pX - c(X)$$

一阶条件：

$$p = c'(X)$$

市场均衡解：

$$u'(x) = c'(x)$$

注 污染的负外部性并没有被考虑进去！

3.2.3 社会最优解

社会最优解可转化为以下经济模型：

$$\max u(x) + y - dX$$

$$\text{s.t. } x = X, c(x) + y = I$$

也就是，最大化：

$$u(x) + I - c(x) - dx$$

一阶条件：

$$u'(x) = c'(x) + d$$

这个式子代表了实现社会最优的条件：消费的最后一单位商品所带来的边际效用，等于生产的边际成本与外部性（此处为污染）造成的边际负效用之和。

我们将两种解对比如下：

	边际收益	边际成本
市场解	$PMB = u'(x)$	$PMC = c'(x)$
社会解	$SMB = u'(x)$	$SMC = c'(x) + d$

3.3 纠正外部性

3.3.1 为何需要纠正？

因为存在**无谓损失**！

它指的是当市场未在其最优水平上运行时（通常由垄断、关税、配额、税收或其他扭曲等市场失灵引起），经济效率出现的下降。在我们的例子中，由于空气污染，私人边际成本（PMC）不等于社会边际成本（SMC）。

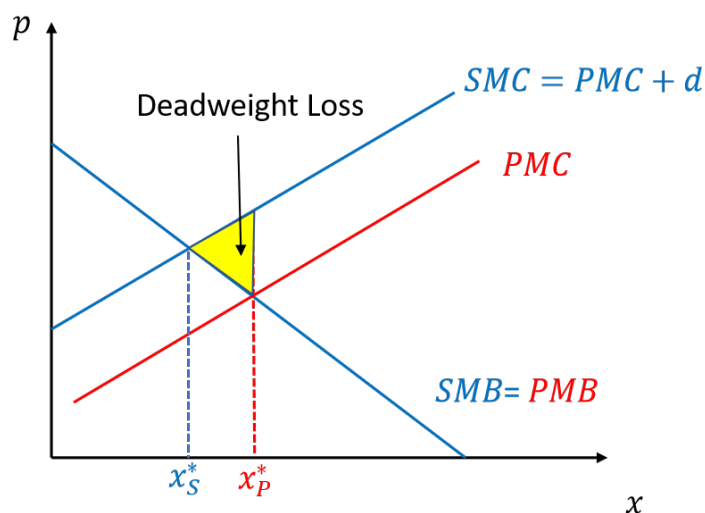


图 3.1: 无谓损失

3.3.2 外部性下的市场失灵

为何会发生市场失灵？

私人决策者在做选择时，并没有将污染的社会成本考虑在内。

社会最优污染水平

- 它由社会边际收益等于社会边际成本的点决定：

$$PMB = PMC + MD$$

- 这需要知道 PMB 、 PMC 和 MD （边际损害）。
- 由于不存在污染的市场， MD 很难衡量。
- 注意：社会最优污染水平未必是零。

我们有以下几种纠正外部性的政策工具。

- 明晰产权（科斯方案）
- 基于价格的方法
 - 征税或补贴（庇古税）
- 基于数量的方法
 - 命令与控制（政府规制）
 - 总量控制与交易（排污权交易）

3.4 科斯定理

3.4.1 定义与例子

本节将通过实例介绍科斯定理及其解决外部性的方法。

定义 3.2 (科斯定理 (Coase Theorem))

若市场中的交易成本为零，则无论初始产权如何分配，市场机制都会自动引导资源实现帕累托最优配置。

情形 3.3 (一个现实生活中的例子)

A: 螺蛳粉（一种气味浓烈的米粉）爱好者；吃螺蛳粉的效用为 10。

B: 不喜欢螺蛳粉的气味；获得洁净空气的效用为 20。

社会最优：

- 若 A 吃螺蛳粉：A 的效用 = 10，B 的效用 = 0，总效用 = 10。
- 若 A 不吃螺蛳粉：A 的效用 = 0，B 的效用 = 20，总效用 = 20。
- 因此，不吃螺蛳粉是社会最优结果。

情形 1：A 拥有吃螺蛳粉的权利

- B 可支付 A 15，让他不吃螺蛳粉。
- 结果：A 的效用 = 15，B 的效用 = 5。总效用 = 20。

情形 2：B 拥有享受洁净空气的权利

- A 和 B 无法达成互利的协议（A 补偿不起 B）。
 - 结果：A 不吃螺蛳粉。A 的效用 = 0，B 的效用 = 20。总效用 = 20。
- 两种情形下，最终配置都是帕累托最优的（总效用 = 20），无论初始产权归谁。

3.4.2 一个数学例子

现在我们转向一个包含数学推导的例子：燃油汽车与空气质量。

考虑一个只有两个行为主体的简化经济体：一个汽车制造商和一个消费者。汽车生产会产生污染，从而对消费者的效用产生负面影响。我们来分析两种不同的清洁空气产权分配情形，并证明，当谈判可行时，两者都能达成相同的社会最优结果。

情形 1：清洁空气权属于消费者

- 每生产一辆汽车，制造商就必须向消费者支付一笔污染费 d 。
- 厂商利润最大化：

$$\max_x px - C(x) - dx$$

$$p = C'(x) + d$$

- **消费者效用最大化**：消费者的效用取决于汽车消费量 x 、其他商品 y 以及总污染 dX （其中 X 为汽车总产量）。

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u(x) + y - dX \\ \text{s.t.} \quad & px + y = I + dX \end{aligned}$$

将预算约束中的 y 代入：

$$u(x) + I - px$$

一阶条件：

$$p = u'(x)$$

- **均衡条件**：

$$p = u'(x) = C'(x) + d$$

情形 2：清洁空气权属于厂商

- 消费者愿意为每减少一辆车的产量支付 d 给厂商。
- **厂商利润最大化**：厂商从某个基准产量水平 X_p^* 开始，每削减一单位产量，可获得 d 的支付。

$$\max_x \quad px - C(x) + d(X_p^* - x)$$

一阶条件：

$$p = C'(x) + d = SMC$$

- **消费者效用最大化**：消费者的预算约束现在需反映为减少污染而向厂商支付的款项。

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & u(x) + y - dX \\ \text{s.t.} \quad & px + y = I - d(X_p^* - X) \end{aligned}$$

代入 y ：

$$u(x) + I - dX_p^* - px$$

一阶条件：

$$p = u'(x)$$

- **均衡条件**：

$$p = u'(x) = C'(x) + d$$

结论

两种情形下的均衡条件完全一致：

$$p = u'(x) = C'(x) + d$$

这验证了**科斯定理**在实际中是如何起作用的：无论清洁空气的产权是赋予消费者还是厂商，只要交易成本为零且谈判可行，市场都能达到同一个有效率的结果。

3.5 解决方案：征税或补贴

在上一个例子中，政府对生产者每单位汽车征收 d 的税。此时，有**生产者利润最大化**：

$$\max_x px - C(x) - dx$$

一阶条件：

$$p = C'(x) + d = SMC$$

一般来说，税额应设定为等于社会边际成本与私人边际成本之差。

那么下一个问题就是：**科斯方案还是庇古税**？

两种方法都需要了解边际损害（MD）。

- 在产权界定清晰的条件下，若 MD 未知，信息不对称可能导致市场失灵。
- 征收庇古税时，税率应正好等于 MD。

科斯方案的挑战：

- 谈判成本可能很高，尤其是当企业需要与每个消费者逐一协商时。
- 它更适用于参与者数量较少的市场（thin market）。

庇古税的潜在问题：

- 可能导致**局部最优**而非全局最优（Baumol, 1972）。
 - 例子：一家工厂污染了河流。可能的解决方案包括减排或搬迁工厂。
 - 在产权清晰的情况下，成本最低的方案会被选中。
 - 而在庇古税下，工厂可能选择减排，这会吸引更多人搬到河边居住，从而增加边际损害。
- 庇古税更适用于参与者众多的市场（thick market）。

3.6 政府规制（命令与控制）

想象一个被雾霾困扰的城市。政府出手，告诉每家工厂：“你们必须将排放量恰好削减 30%。”这很直截了当，但有效率吗？这就是**命令与控制型规制（command-and-control regulation）**的本质——纠正外部性导致的市场失灵最古老、也最直接的方法之一。

政府直接设定污染限额，例如，要求汽车厂的排放不得超过 x^* 。某些情况下，还会要求企业采用特定减排技术。

- **优点**
 - 易于实施和执行。
 - 能迅速实现预期的减排目标。
- **缺点**
 - 对企业来说，只要达到强制标准，就几乎没有什么动力去进一步创新和开发更绿色的技术。
 - 无视企业间的异质性：有些企业减排成本很高，另一些则可以低成本减排。一刀切的标准因此是低效率的。

3.7 排放权交易（总量控制与交易）

当然，另一种方式是直接通过命令与控制来**规制排放量**。而像总量控制与交易这类基于市场的工具，通常能提供更大的灵活性和效率。

设定一个排放总量上限后，政府允许企业之间交易排污许可证。

- 减排成本高的企业可以从减排成本低的企业那里购买许可证。
- 相比命令与控制型规制的优势
 - **正视企业异质性**：减排成本低的企业会多减排，并出售其多余的许可证；减排成本高的企业可以购买许可证，从而避免以高昂的代价自行减排。这确保了社会以最低可能的总成本实现污染削减。
 - **激励创新**：企业有持续的动力去开发更绿色的技术，因为它们可以通过出售未使用的许可证来获利。

3.8 庇古税与总量控制与交易：价格 vs. 数量

试图减少污染的决策者手中有两种强有力的工具：要么**为污染设定一个价格**（庇古税），让市场去决定数量；要么**设定一个数量限制**（总量控制与交易），让市场去决定价格。哪个更好？

- **庇古税**：基于价格的工具
- **总量控制与交易**：基于数量的工具
- **价格 vs. 数量**
 - 在我们之前汽车生产的例子中，在完全信息下，两种工具都能达到相同的有效结果。
 - 然而，当减排的边际成本或边际收益存在不确定性时，两种方法可能导致不同的结果。（参见 Weitzman, *Review of Economic Studies*, 1974）

正如马丁·韦茨曼在其 1974 年的经典论文中所揭示的，答案取决于不确定性。韦茨曼的核心洞见是：如果边际收益曲线相对平坦（即，污染的边际社会损害对数量变化不敏感），则价格工具（税收）更可取。如果边际成本曲线相对平坦，则数量工具（总量上限）更可取。选择取决于哪种不确定性——成本还是收益——对社会福利影响更大。

3.9 外部性有多大？衡量污染成本

当工厂排放污染时，它给社会带来了成本。但这成本有多大？与苹果或汽车不同，污染没有市场价格。经济学家们发明了创造性的方法，从可观察的行为中推断其价值。两种主要的方法是：

- **特征价格法**：利用间接的市场价格来推断环境物品的价值。例如，空气污染会在多大程度上影响房价？(Chay & Greenstone, *JPE* 2005)
- **条件价值评估法**：使用调查问卷询问人们愿意为更清洁的空气支付多少。

Chay & Greenstone, *JPE* 2005

研究问题：空气污染每增加一个单位，会使房价下降多少？

- **线性回归**：

$$\text{HousingPrice}_{ct} = \alpha \text{Pollution}_{ct} + X_{ct} + \delta \lambda_c + \gamma_t + \varepsilon_{ct}$$

- **两期数据（1970 和 1980 年）**：由于只有两期，固定效应等价于一阶差分。

$$\Delta \text{HousingPrice}_c = \alpha \Delta \text{Pollution}_c + \delta \Delta X_c + \mu_c$$

其中 $\Delta X_c = X_{c,1980} - X_{c,1970}$ 。

- **OLS 的潜在偏误**：

- **遗漏变量偏误**：

- 在没有城市固定效应的情况下，高污染地区往往是城市地区，而城市房价更高。这会使估计出的 α 偏高（不那么负）。
- 经济繁荣同时增加了污染和房价，这也会使 α 偏高。

- **自选择偏误**：

- 对污染不那么敏感的人可能会选择居住在高污染地区，这使得房价对污染的反应不灵敏（使 α 偏向零）。

为处理这些偏误，Chay 和 Greenstone 使用了一个影响污染但不直接影响房价的工具变量。

工具变量法

对于不熟悉工具变量（IV）的读者，我们简要回顾一下计量经济学中的核心思想。

定义 3.3 (工具变量 (Instrumental Variable): 类比自然科学的实验)

工具变量是在回归分析中引入的第三个变量，它与解释变量相关，但与响应变量不直接相关。通过使用这一变量，便能估计某个解释变量对响应变量的真实因果效应。

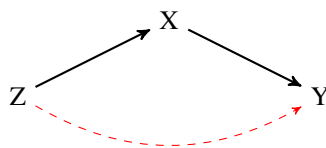
想象我们想研究**污染对房价**的因果效应。这类似于一个自然科学问题：**疾病 X 会影响睡眠质量吗？**

如果我们只看观测数据，将睡眠质量对疾病 X 做回归，或许会发现相关性。但相关不等于因果。为什么？

- **遗漏变量偏误**：悲观的人可能更容易患上疾病 X，同时他们也倾向于睡眠质量差。
- **反向因果**：长期睡眠差的人可能更容易患上疾病 X。

两种情况下，X 对 Y 的估计关系都是有偏的。我们需要一种方法来隔离出因果渠道。

工具变量 (Z) 的作用



一个工具变量 Z 必须满足两个关键条件：

1. **相关性**：Z 必须影响 X。
 - 在药物试验中，Z（治疗）必须对疾病 X 有效——不能是像面粉或水那样的安慰剂。
2. **排他性约束**：Z 只能通过 X 影响 Y。
 - Z 不能直接影响 Y（例如，若药物有导致失眠或嗜睡的副作用，它就不是一个好工具变量）。
 - Z 也不能通过其他渠道影响 Y（例如，若药物导致头痛，进而影响睡眠质量，就违反了排他性约束）。

回到 Chay 和 Greenstone, JPE 2005

- **工具变量**：1970 年美国《清洁空气法》修正案。
 - 该法案为五种主要空气污染物设定了标准。

- 未达标的县被划为“未达标”区域，被要求采取措施改善空气质量。
- 未达标状态是污染变化的一个强预测因子，但除了通过污染这一途径外，不应直接影响房价。

● 第一阶段：

$$\Delta \text{Pollution}_c = \beta_1 Z_c + \beta_2 \Delta X_c + \varepsilon_c$$

其中 Z_c 是未达标状态的指示变量。

● 第二阶段：

$$\Delta \text{HousingPrice}_c = \alpha_1 \widehat{\Delta \text{Pollution}_c} + \alpha_2 \Delta X_c + \mu_c$$

● 工具变量时期的选择：作者使用 1975–1976 年的未达标状态作为工具变量，原因是：

- 它更接近 1980 年，能尽量减少迁移反应带来的影响。
- 处理组和控制组的县更具可比性。

以下是实证结果。阅读表格，思考回答下面的问题。

TABLE 5
INSTRUMENTAL VARIABLES ESTIMATES OF THE EFFECT OF 1970–80 CHANGES IN TSPs
POLLUTION ON CHANGES IN LOG HOUSING VALUES

	(1)	(2)	(3)	(4)
A. TSPs Nonattainment in 1975 or 1976				
Mean TSPs (1/100)	-.362 (.152)	-.213 (.096)	-.266 (.104)	-.202 (.090)
Sample size	988	983	983	983
B. TSPs Nonattainment in 1975				
Mean TSPs (1/100)	-.350 (.150)	-.204 (.099)	-.228 (.102)	-.129 (.084)
Sample size	975	968	968	968
C. TSPs Nonattainment in 1970, 1971, or 1972				
Mean TSPs (1/100)	.072 (.058)	-.032 (.042)	-.050 (.041)	-.073 (.035)
Sample size	988	983	983	983
County Data Book covariates	no	yes	yes	yes
Flexible form of county covariates	no	no	yes	yes
Region fixed effects	no	no	no	yes

NOTE.—See the notes to previous tables. The coefficients are estimated using 2SLS. The first row of panels A–C indicates which instrument is used. From panels A to C, the instruments are an indicator equal to one if the county was nonattainment for TSPs in either 1975 or 1976, an indicator equal to one if the county was nonattainment for TSPs in 1975, and an indicator that equals one if the county was nonattainment for TSPs in either 1970, 1971, or 1972, respectively. Standard errors (in parentheses) are estimated using the Eicker-White formula to correct for heteroskedasticity.

$$\ln \text{Price} = \alpha \frac{\text{Pollution}}{100}$$

$$\frac{d\text{Price}}{\text{Price}} = \frac{\alpha}{100} d\text{Pollution}$$

问题 3.1 面板 A 和面板 C 有什么区别？

- 所选工具变量的年份不同。
 - 面板 A 使用 1975–1976 年的空气质量达标状态作为工具变量。
 - 面板 C 使用 1970–1972 年的空气质量达标状态作为工具变量。

问题 3.2 解读回归结果：以第 (4) 列为例。哪个面板的结果显示空气污染的外部性更大？

- 面板 A 结果：空气污染每增加一个单位，房价下降 0.2%。
- 面板 C 结果：空气污染每增加一个单位，房价下降 0.07%。
- 面板 A 估计出的污染对房价的负面影响更大（0.2% 对 0.07%），表明人们感受到的污染外部成本更大。

造成这种差异的原因是，1975–1976 年的达标状态受迁移反应的影响较小，能够更干净地比较处理组和对照组，因而面板 A 的估计结果更为可靠。

第 4 章 公共物品

内容提要

- 公共物品
- 萨缪尔森有效供给
- 林达尔均衡
- 克拉克机制

本章将介绍公共物品最优供给的萨缪尔森规则、作为市场解决方案的林达尔价格，以及用于偏好揭示的克拉克机制。我们将分析如何克服公共物品融资中的搭便车问题。

4.1 有效供给：萨缪尔森规则

4.1.1 公共物品的定义

定义 4.1 (公共物品)

具有非排他性和非竞争性



表 4.1: 基于竞争性与排他性的物品分类

	排他性	非排他性
竞争性	私人物品 (例如：食品、衣物)	公共资源 (例如：森林、空气)
非竞争性	俱乐部物品 (例如：收费公园、图书馆)	纯公共物品 (例如：国防)

以道路为例的具体分类。

	排他性	非排他性
竞争性	收费的拥堵道路	不收费的拥堵道路
非竞争性	收费的非拥堵道路	不收费的非拥堵道路

4.1.2 有效供给：萨缪尔森规则 (First best: The Samuelson Rule)

考虑这样一个经济体：

- 两个代表性消费者：A 和 B
- 两种商品：X（私人物品）和 G（公共物品）
- 消费者效用函数： $U_i(X, G)$, $i = A, B$

- 特例（拟线性效用）：

$$U_i(X, G) = X + u_i(G)$$

- 生产可能性边界： $F(X, G) = 0$

- 特例（线性生产）：

$$aX + bG = \Gamma$$

- 这里，生产一单位 X 需要 a 单位投入，生产一单位 G 需要 b 单位投入。

- 这可以改写为：

$$X + \frac{b}{a}G = \frac{\Gamma}{a}$$

- 不失一般性，我们可以将生产可能性边界简化为：

$$X + cG = \Gamma$$

其中 $c = \frac{b}{a}$ 代表私人物品与公共物品之间的边际转换率。

生产可能性边界

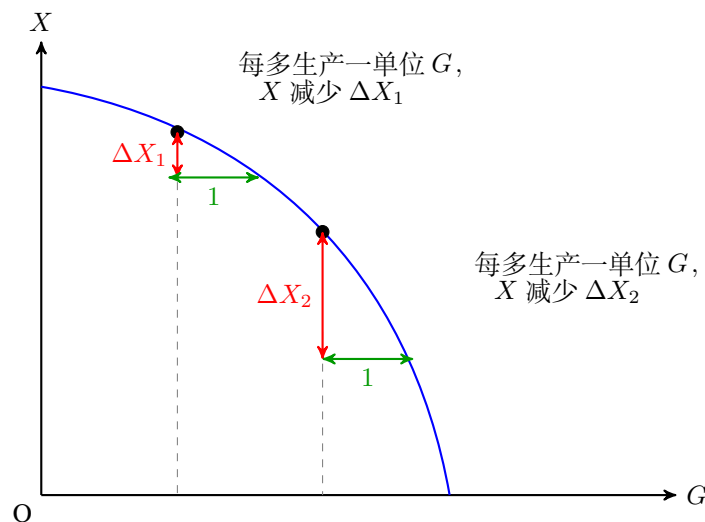


图 4.1: 生产可能性边界

每多生产一单位 G ， X 的产出就减少 ΔX 。

- 多生产一单位 G 时：

$$\Delta X \quad (X \text{ 产出的减少量})$$

- ΔX_1 和 ΔX_2 之间是什么关系？为什么？

- 由于收益递减或机会成本递增，通常 $\Delta X_2 > \Delta X_1$ 。随着更多资源配置到生产 G 上，生产 G 的边际成本增加，意味着每多生产一单位 G ，必须牺牲更多的 X 。

- 生产可能性边界的斜率被称为**边际转换率 (MRT)**：

$$MRT = \frac{MC_G}{MC_X}$$

其中 MC_G 是多生产一单位 G 的边际成本， MC_X 是多生产一单位 X 的边际成本。

- 直观理解：

- 多生产一单位 X 需要 a 单位投入。
- 多生产一单位 G 需要 b 单位投入。

- 因此，多生产一单位 G 意味着牺牲 $\frac{b}{a}$ 单位的 X ：

$$MRT = \frac{b}{a}$$

这是在给定资源和技术下，经济将 X 转换为 G 的比率。

4.1.3 私人物品的最优供给：假设 X 和 G 都是私人物品

帕累托最优配置满足：

$$\max \alpha_1 U_A(X_A, G_A) + \alpha_2 U_B(X_B, G_B)$$

$$\text{s.t. } (X_A + X_B) + c(G_A + G_B) = \Gamma$$

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = \alpha_1 U_A(X_A, G_A) + \alpha_2 U_B(X_B, G_B) + \lambda [\Gamma - (X_A + X_B) - c(G_A + G_B)]$$

一阶条件：

$$(X_A) : \alpha_1 MU_{AX} = \lambda, \quad (G_A) : \alpha_1 MU_{AG} = \lambda c$$

$$(X_B) : \alpha_2 MU_{BX} = \lambda, \quad (G_B) : \alpha_2 MU_{BG} = \lambda c$$

化简这些条件可得：

$$\frac{MU_{AG}}{MU_{AX}} = \frac{MU_{BG}}{MU_{BX}} = c$$

解释：

- 最优解满足：边际替代率（MRS）等于边际转换率（MRT）：

$$MRS = MRT$$

- 拟线性效用情形：

$$U_i(X, G) = X + u_i(G)$$

一阶条件简化为：

$$u'_A(G_A) = u'_B(G_B) = c$$

- 这意味着：对于每个消费者，**边际效用等于边际成本**。在拟线性设定下，每个个体的最优 G 数量取决于他们从 G 获得的边际收益等于边际成本 c 的点。

拟线性效用情形

考虑私人物品 G 。消费者 A 的需求曲线由 $D_A = u'_A(G_A)$ 给出，消费者 B 的需求曲线为 $D_B = u'_B(G_B)$ 。市场供给曲线为 $S = MC(G)$ ，其中 $G = G_A + G_B$ 是总数量。均衡价格和数量是多少？

推导需求曲线

每个消费者求解效用最大化问题：

$$\max_{X,G} X + u(G) \quad \text{s.t.} \quad X + pG = I$$

将预算约束代入目标函数：

$$\max_G I - pG + u(G)$$

一阶条件给出：

$$p = u'(G)$$

因此，每个消费者的需求曲线就是其边际效用曲线： $D_i = u'_i(G_i)$ 。

推导供给曲线

企业最大化利润：

$$\max_G pG - C(G)$$

一阶条件给出：

$$p = C'(G) = MC(G)$$

因此，市场供给曲线就是边际成本曲线。

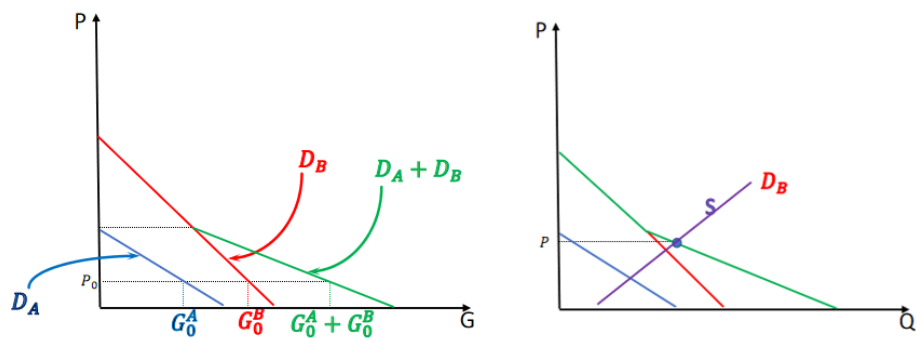


图 4.2: 私人物品的图形解

情形 4.1 (直观例子)

如果米饭每碗 1 元，A 需要 1 碗，B 需要 2 碗。他们总共需要多少碗？

$$\text{总需求量} = 1 + 2 = 3 \text{ 碗}$$

这说明了水平加总：在 $P = 1$ 时， $G_A = 1$ ， $G_B = 2$ ，因此市场总需求 $G = 3$ 。

• 私人物品的社会需求曲线：

社会需求曲线是通过对个人需求曲线进行**水平加总**得到的：对于给定的价格 P ，我们将每个消费者需求的数量相加。

$$G(P) = G_A(P) + G_B(P)$$

- 在市场均衡时：

$$P = u'_A(G_A) = u'_B(G_B) = MC(G_A + G_B)$$

4.1.4 公共物品的最优供给：假设 G 是公共物品

考虑一个经济中有两个消费者（A 和 B）和两种商品：私人物品 X 和公共物品 G 。公共物品具有非竞争性和非排他性，意味着两个消费者享有相同的数量 G 。

帕累托最优配置求解：

$$\max \alpha_1 U_A(X_A, G) + \alpha_2 U_B(X_B, G)$$

$$\text{s.t. } (X_A + X_B) + cG = \Gamma$$

其中 c 是以私人物品衡量，多生产一单位公共物品的边际成本（即边际转换率 $MRT = c$ ）。

拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = \alpha_1 U_A(X_A, G) + \alpha_2 U_B(X_B, G) + \lambda [\Gamma - (X_A + X_B) - cG]$$

一阶条件

$$(X_A): \alpha_1 MU_{AX} = \lambda$$

$$(X_B): \alpha_2 MU_{BX} = \lambda$$

$$(G): \alpha_1 MU_{AG} + \alpha_2 MU_{BG} = \lambda c$$

将 G 的条件除以 λ ，并利用 X_A 和 X_B 的条件替换 λ ：

$$\frac{\alpha_1 MU_{AG}}{\alpha_1 MU_{AX}} + \frac{\alpha_2 MU_{BG}}{\alpha_2 MU_{BX}} = c$$

这简化为：

$$\frac{MU_{AG}}{MU_{AX}} + \frac{MU_{BG}}{MU_{BX}} = c$$

解释

- 最优解满足：**边际替代率之和**等于**边际转换率**：

$$MRS_A + MRS_B = MRT$$

- 这就是著名的**萨缪尔森规则** (Samuelson 1954, *Review of Economics and Statistics*)。
- 直观理解：对于公共物品，社会边际收益是所有个体边际收益的总和。最优供给要求这一总和等于生产的边际成本。

拟线性效用情形

考虑公共物品 G 。消费者 A 的需求曲线（边际收益）由 $D_A = u'_A(G)$ 给出，消费者 B 的需求曲线为 $D_B = u'_B(G)$ 。市场供给曲线为 $S = MC(G)$ ，其中 G 是提供的公共物品总数量（两个消费者享有相同数量）。

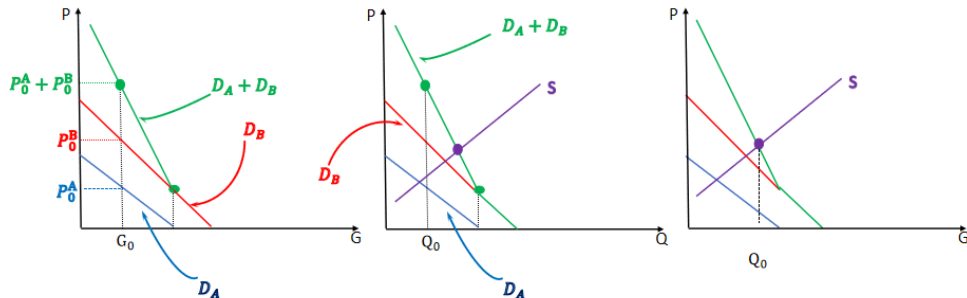


图 4.3: 公共物品的图形解

情形 4.2 (直观例子)

在一间教室里：

- A 愿意为 1 小时空调支付 1 元
- B 愿意为 1 小时空调支付 2 元

问题 4.1 他们共同愿意为 1 小时空调支付多少钱？

$$\text{总支付意愿} = 1 + 2 = 3 \text{ 元}$$

在教室的例子中：

- 当 $G = 1$ 小时， $u'_A(1) = 1$ 元， $u'_B(1) = 2$ 元
- 总边际收益 $= 1 + 2 = 3$ 元
- 如果提供 1 小时空调的边际成本是 3 元，那么 $G^* = 1$ 小时就是最优的

- 公共物品的社会需求曲线

社会需求曲线是通过对个人需求曲线进行垂直加总得到的：

$$\text{在给定数量 } G \text{ 下, } P_{\text{total}}(G) = P_A(G) + P_B(G)$$

- 最优供给条件：

在社会最优数量 G^* 处：

$$u'_A(G^*) + u'_B(G^*) = MC(G^*)$$

4.1.5 对萨缪尔森规则的评论

假设政府拥有关于消费者偏好的完美信息。

它没有考虑到提供公共物品可能需要征税，而征税会带来市场扭曲。

它只关注公共物品的最优数量，而不关心由谁来提供。因此，推导过程仅使用了非竞争性，未使用非排他性。当考虑谁应为公共物品付费时，非排他性就变得相关，从而产生了“搭便车问题”。

4.2 一个假设的市场解决方案：林达尔价格

4.2.1 什么是林达尔价格？

目标：我们如何通过市场机制实现公共物品的最优供给？

公共物品的边际效用因消费者而异。让每个人支付一个不同的价格，该价格反映其支付意愿（边际效用）。在林达尔价格下，每个消费者对公共物品的需求量相同。

这样一组个性化价格被称为“**林达尔价格**”。在均衡时，公共物品的数量必然是最优的吗？

情形 4.3 (林达尔价格示例)

考虑两个邻居 A 和 B，他们共用一个楼梯，需要决定如何为公共照明的电费付费。

- 每小时的电力成本是固定且已知的。
- A 和 B 必须决定：
 - 各自分摊的成本份额。令 h 为 A 支付的份额， $1-h$ 为 B 支付的份额。
 - 灯每天打开的小时数，记为 Q 。

关键问题

1. 是否存在某个成本分摊份额 h^* ，使得 A 和 B 对灯光的需求量 Q 相同？
2. 如果这样的 h^* 存在，由此得出的数量 Q^* 是否是社会最优的？即，它是否满足萨缪尔森规则？



4.2.2 林达尔价格的一般情形

考虑这样一个经济体：

- 两个代表性消费者：A 和 B
- 两种商品：
 - X ：私人物品
 - G ：公共物品（非竞争性和非排他性）
- 消费者：
 - 效用函数：对于 $i = A, B$ ， $U_i(X, G)$
 - 特例（拟线性效用）：

$$U_i(X, G) = X + u_i(G)$$

- 初始禀赋（理解为收入）： I_A 和 I_B
- 生产：
 - 假设生产 X 的边际成本为 1
 - 假设生产 G 的边际成本为 c
 - 在完全竞争市场中， X 的价格为 1， G 的价格为 c

在林达尔定价方案下，每个消费者为公共物品 G 支付一个个性化的价格：

- 消费者 A 为每单位 G 支付 τ_A
- 消费者 B 为每单位 G 支付 τ_B

- 这些个性化价格必须覆盖生产的边际成本：

$$\tau_A + \tau_B = c$$

关键问题

1. 我们能否找到个性化价格 τ_A^* 和 τ_B^* ，使得两个消费者对公共物品的需求量 G^* 相同？
2. 如果这样的价格存在，由此得出的数量 G^* 是否是社会最优的？即，它是否满足萨缪尔森规则？

4.2.3 消费者优化

每个消费者在其预算约束下选择私人物品 X_i 和公共物品 G （共同消费）的消费量。

对于消费者 A：

$$\max_{X_A, G} U_A(X_A, G) \quad \text{s.t.} \quad X_A + \tau_A G = I_A$$

拉格朗日函数为：

$$L = U_A(X_A, G_A) + \lambda_A(I_A - X_A - \tau_A G_A)$$

A 的一阶条件

$$(X_A) : MU_{AX}(X_A, G_A) = \lambda_A$$

$$(G_A) : MU_{AG}(X_A, G_A) = \lambda_A \tau_A$$

将两个条件相除，得到：

$$\frac{MU_{AG}(X_A, G_A)}{MU_{AX}(X_A, G_A)} = \tau_A$$

类似地，对于消费者 B：

$$\frac{MU_{BG}(X_B, G_B)}{MU_{BX}(X_B, G_B)} = \tau_B$$

在林达尔均衡中，必须满足两个关键条件：

- 两个消费者对公共物品的需求量相同：

$$G_A = G_B = G^*$$

- 个性化价格覆盖生产的边际成本：

$$\tau_A + \tau_B = c$$

将均衡条件代入一阶条件：

$$\frac{MU_{AG}(X_A, G^*)}{MU_{AX}(X_A, G^*)} + \frac{MU_{BG}(X_B, G^*)}{MU_{BX}(X_B, G^*)} = \tau_A + \tau_B = c$$

因此：

$$\frac{MU_{AG}}{MU_{AX}} + \frac{MU_{BG}}{MU_{BX}} = c$$

解释

- 这正是公共物品最优供给的**萨缪尔森规则**：

$$MRS_A + MRS_B = MRT$$

- 林达尔均衡达到了**社会最优（帕累托有效）**的配置。
- 个性化价格 τ_A 和 τ_B 反映了每个消费者在最优点的边际替代率。

拟线性效用情形

在拟线性效用 $U_i(X, G) = X + u_i(G)$ 下，林达尔价格简化为：

$$\tau_A = u'_A(G^*), \quad \tau_B = u'_B(G^*)$$

萨缪尔森规则变为：

$$u'_A(G^*) + u'_B(G^*) = c$$

情形 4.4 (回到楼梯照明的例子)

- 令 G 为楼梯灯打开的小时数。
- 灯光对 A 和 B 的边际效用（收益）分别为 $u'_A(G)$ 和 $u'_B(G)$ 。
- 每小时的电力成本为 c 元。
- 社会最优数量 G^* 满足这样的条件：**社会边际收益等于社会边际成本**：

$$u'_A(G^*) + u'_B(G^*) = c$$

- 一个假想的市场（林达尔定价）可以实现这一社会最优：
 - A 每小时支付 $u'_A(G^*)$
 - B 每小时支付 $u'_B(G^*)$
 - A 和 B 都恰好需求 G^* 小时的灯光

因此，林达尔机制提供了一种方式，即使不存在实际的市场，也能将公共物品的有效供给分散化实现。接下来，我们用图形来演示林达尔定价机制。

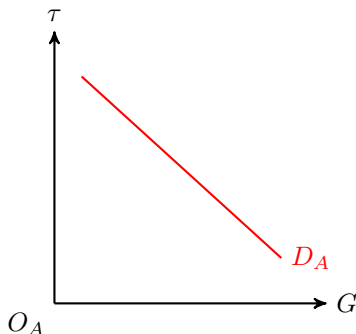


图 4.4: A 的需求曲线

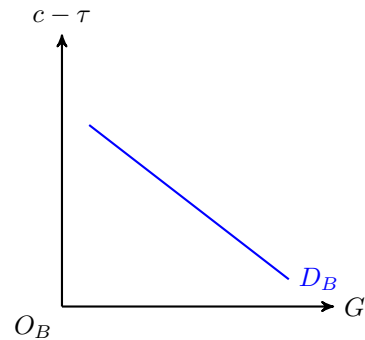


图 4.5: B 的需求曲线

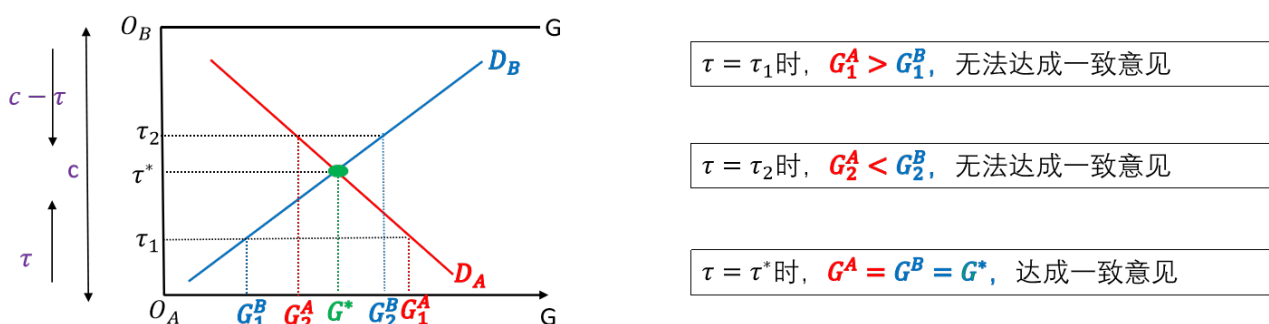


图 4.6: 达成共识的过程

4.2.4 对林达尔价格的评论

理论成就:

- 从理论上讲, 林达尔定价机制可以实现社会最优配置。
- 推导过程仅依赖于公共物品的非竞争性属性, 并不需要非排他性。

实际困难:

- 在现实中, 由于非排他性, 林达尔价格难以实施。
- 搭便车问题出现了: 个体没有动机揭示自己的真实偏好。
- 该机制需要了解每个消费者的边际效用:

$$\tau_i = MU_i(G)$$

但消费者会低报其真实边际效用以避免付费。

如何引出真实偏好?

- 爱德华·克拉克提出了一种机制设计, 激励个体揭示其对公共物品的真实偏好。
- 这被称为克拉克 (格罗夫斯) 机制或关键人机制。
- 它创造了一种情境, 其中讲真话是每个个体的占优策略。

我们现在转向这种机制设计方法。

4.3 克拉克机制设计

4.3.1 模型设定

- 有 n 个消费者。为简单起见, 考虑 $n = 3$ 。
- 考虑一种公共物品的供给。
 - 一般情形: 公共物品的数量 G 是连续的。
 - 特例: (在我们的设定中) G 是二元的, 只取两个值:

$$G \in \{0, 1\}$$

例如: 开空调或不开, 安装电灯或不安装。

- 公共物品的总成本为 c 。
- 消费者分摊成本。令 c_1, c_2, c_3 分别为消费者 1、2、3 的支付额, 满足:

$$c_1 + c_2 + c_3 = c$$

- 公共物品为消费者 1、2、3 分别带来效用 u_1, u_2, u_3 。

- **社会效率条件**：当且仅当 $u_1 + u_2 + u_3 > c$ 时，才应提供该公共物品。

问题：公共物品机制设计的核心挑战

- 消费者知道自己从公共物品中获得的真实效用 u_i ，但他们没有动机如实报告。
- 如果被问及，消费者可能会低报效用以避免付费，或高报效用以便让物品在他人付费的情况下得以提供。
- **关键问题**：我们如何设计一个机制，诱导消费者吐露其真实效用？

4.3.2 机制描述

步骤 1：设定成本分摊份额

- 政府首先为每个消费者设定成本分摊份额 c_i ，满足：

$$\sum_{i=1}^n c_i = c$$

其中 c 是提供公共物品的总成本。

步骤 2：引出偏好

- 要求每个消费者报告其从公共物品中获得的净效用，记为 s_i 。
- 消费者 i 的真实净效用为：

$$r_i = u_i - c_i$$

其中 u_i 是真实总效用。

- 除非给予适当的激励，消费者可能不会如实报告。

步骤 3：决策规则与克拉克税

- 当且仅当报告的净效用之和为正时，才提供公共物品：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s_i > 0 &\Rightarrow \text{提供} \\ \sum_{i=1}^n s_i \leq 0 &\Rightarrow \text{不提供} \end{aligned}$$

- 如果一个消费者的报告改变了社会决策，他/她就被称为**关键人**（或关键行动者）
- 关键消费者必须支付一项税收，称为**克拉克税**。

定义 4.2 (关键人/关键行动者)

如果一个个体报告偏好后，使得社会决策（是否提供公共物品）发生改变，则该个体被称为“关键行动者”。如果包含和不包含消费者 j 的报告时决策不同，则该消费者 j 就是关键人。



情形	不包含 j 时	包含 j 时	对 j 的税收
1	$\sum_{i \neq j} s_i > 0$ (应提供)	$\sum_i s_i < 0$ (不应提供)	$\sum_{i \neq j} s_i$ (其他人的净损失)
2	$\sum_{i \neq j} s_i < 0$ (不应提供)	$\sum_i s_i > 0$ (应提供)	$-\sum_{i \neq j} s_i$ (其他人的净损失)

表 4.2: 对关键消费者 j 的克拉克税

笔记

- 向关键消费者收取的税收不会在其他 $n - 1$ 个消费者之间分配。

- 相反，它支付给群体之外的某方（例如政府），并不影响这 n 个消费者的效用。
- 这确保了税收不会在消费者之间产生额外的策略性行为激励。

4.3.3 个体最优选择

关键结果：报告真实效用是占优策略。不论其他人如何报告，揭示真实偏好都是每个个体的（一个）最优选择。考虑消费者 j 的决策问题：

- 通过报告不同的净效用 s_j ，消费者 j 能影响公共物品是否被提供（ $G = 1$ ）或不被提供（ $G = 0$ ）。
- 给定其他人的报告之和 $\sum_{i \neq j} s_i$ ，消费者 j 的效用可总结为：

	$\sum_{i \neq j} s_i > 0$	$\sum_{i \neq j} s_i < 0$
$G = 1$	r_j	$r_j + \sum_{i \neq j} s_i$
$G = 0$	$-\sum_{i \neq j} s_i$	0

表 4.3: 不同情形下消费者 j 的效用

给定 $\sum_{i \neq j} s_i$ ，消费者 j 的效用可以表示为：

$$U_j = \left(r_j + \sum_{i \neq j} s_i \right) \cdot G - \sum_{i \neq j} s_i \cdot \mathbf{I} \left(\sum_{i \neq j} s_i > 0 \right)$$

其中 $\mathbf{I}(\cdot)$ 是指示函数：

$$\mathbf{I} \left(\sum_{i \neq j} s_i > 0 \right) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } \sum_{i \neq j} s_i > 0 \\ 0, & \text{如果 } \sum_{i \neq j} s_i < 0 \end{cases}$$

解释：

- 第一项 $\left(r_j + \sum_{i \neq j} s_i \right) \cdot G$ 表示，若提供公共物品，总社会剩余是多少。
- 第二项 $-\sum_{i \neq j} s_i \cdot \mathbf{I}(\sum_{i \neq j} s_i > 0)$ 是当 j 是关键人时所支付的克拉克税。
- 这一表达式清晰地表明，消费者 j 的最优策略是报告 $s_j = r_j$ ，因为任何误报要么：
 - 不会改变结果，却要承担成为关键人并支付税收的风险，要么
 - 会以一种降低自身效用的方式改变结果。

给定 $\sum_{i \neq j} s_i$ ，消费者 j 的效用可以表示为：

$$U_j = \left(r_j + \sum_{i \neq j} s_i \right) \cdot G - \sum_{i \neq j} s_i \cdot \mathbf{1} \left(\sum_{i \neq j} s_i > 0 \right)$$

其中 $\mathbf{1}(\cdot)$ 是指示函数。

情形 1：如果 $r_j + \sum_{i \neq j} s_i > 0$ ，那么设定 $G = 1$ 能使效用最大化。

如何实现 $G = 1$ ？

当且仅当：

$$s_j + \sum_{i \neq j} s_i > 0$$

公共物品才会被提供 ($G = 1$)。在这种情况下, 如实报告 $s_j = r_j$ 就能确保这一条件成立。

情形 2: 如果 $r_j + \sum_{i \neq j} s_i < 0$, 那么设定 $G = 0$ 能使效用最大化。

如何实现 $G = 0$?

当且仅当:

$$s_j + \sum_{i \neq j} s_i < 0$$

公共物品不会被提供 ($G = 0$)。在这种情况下, 如实报告 $s_j = r_j$ 就能确保这一条件成立。

不论其他人如何选择, 报告自己的真实效用都能最大化个体效用!

4.3.4 对克拉克机制的评论

- 克拉克机制能够实现公共物品的有效供给。

- 决策规则 $\sum_i s_i > 0$ 等价于:

$$\sum_i u_i > \sum_i c_i = c$$

- 这正是社会边际收益超过社会边际成本的条件。

- 然而, 克拉克税的存在可能导致无效率。

- 税收本身是一种转移支付, 不直接影响供给决策, 但可能扭曲参与激励。

- 成本分摊份额 c_i 必须提前确定。

- 这些预先确定的份额可能与消费者从公共物品中获得的实际效用不一致。

- 因此, 一些消费者最终可能获得负的净效用 ($r_i = u_i - c_i < 0$)。

- 提供公共物品可能使某些个体的状况变差。

- 个体可能不愿意参与该机制。

- 如果消费者预期自己可能成为关键人并须支付税收, 或认为成本份额不公平, 他们可能选择不参与。

- 自愿参与无法保证, 这削弱了机制的可行性。

总之, 克拉克机制虽然在理论上解决了偏好揭示问题, 但在公平性、参与度以及税收本身可能带来的无效率方面, 面临着实际挑战。

第5章 社会保险

内容提要

- 期望效用理论
- 信息不对称
- 风险偏好
- 世代交叠模型
- 医疗保险
- 养老金体系

本章将介绍信息不对称下的医疗保险，以及世代交叠框架下的养老保险。最后介绍三篇发表在公共经济学领域顶刊 *Journal of Public Economics* (JPubE) 上的相关论文。

5.1 医疗保险

- 理论基础 1：期望效用理论
 - 个体在不确定性下做决策。
 - 他们最大化的是期望效用，而非确定性结果。
 - 这为我们理解人们为何购买保险、以及他们如何评估风险降低的价值提供了基础。
- 理论基础 2：信息不对称
 - 在保险市场中，买方和卖方掌握着不同的信息。
 - 这会导致两种经典的市场失灵：
 - 逆向选择：健康风险更高的个体更倾向于购买保险，从而推高保费，甚至可能导致市场崩溃。
 - 道德风险：一旦获得保险，个体可能会采取更冒险的行为，或使用比无保险时更多的医疗服务。

5.1.1 期望效用理论

考虑一个具有效用函数 $u(c)$ 的个体，其中 c 代表消费或财富。

- 以概率 q ，消费较低： $c = c_L$
- 以概率 $1 - q$ ，消费较高： $c = c_H$

期望效用：

$$EU = q \cdot u(c_L) + (1 - q) \cdot u(c_H)$$

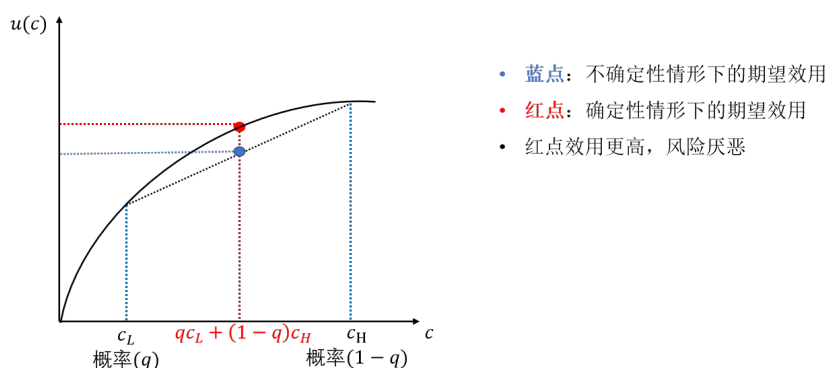


图 5.1: 期望效用的图形展示

练习 5.1 思考题：个体对风险的态度在期望效用框架中是如何体现的？

解

- 风险态度由效用函数 $u(c)$ 的形状所体现。
 - 风险厌恶： $u''(c) < 0$ (凹函数)
 - 风险中性： $u''(c) = 0$ (线性函数)
 - 风险偏好： $u''(c) > 0$ (凸函数)
- $u(c)$ 的曲率决定了个体对不确定性的厌恶程度。
- 对于给定的抽奖，一个风险厌恶者宁愿要一个等于该抽奖期望值的确定结果，也不愿要抽奖本身。

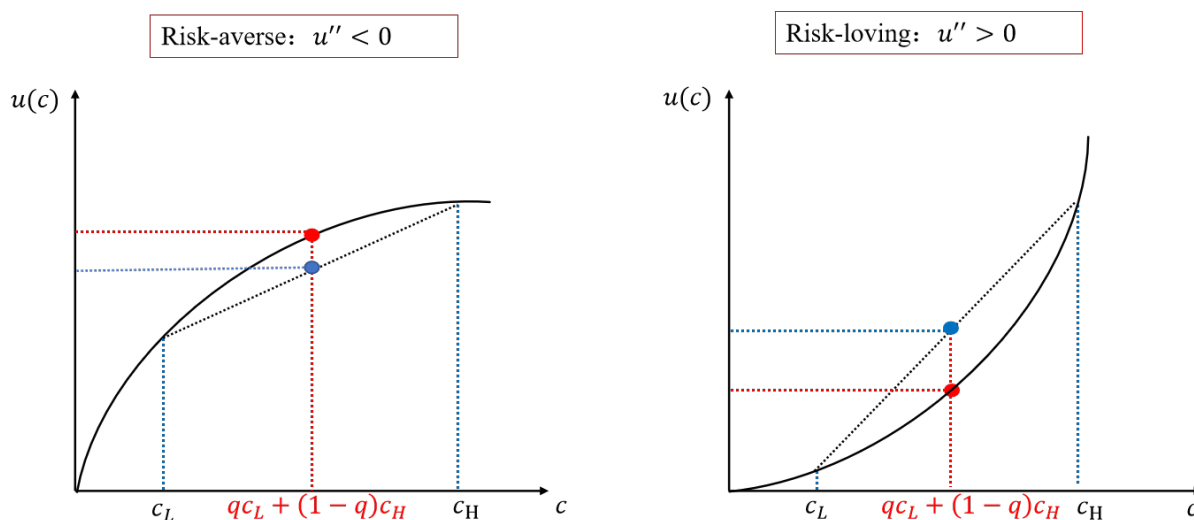


图 5.2: 风险偏好

当效用函数是凹函数 ($u'' < 0$) 时，个体是风险厌恶的，这意味着财富的期望效用小于财富期望值的效用：

$$qu(c_L) + (1-q)u(c_H) < u(qc_L + (1-q)c_H)$$

直观上，边际效用递减意味着，坏结果 (c_L) 带来的效用损失，大于等可能发生的好结果 (c_H) 带来的效用增益，这使得不确定性变得不受欢迎。

5.1.2 一个简单的医疗保险模型

5.1.2.1 模型设定

代表性家庭：

- 收入： W
- 患病概率： q 。若患病，医疗开支为 d 。
- 效用函数： $u(c)$ ，其中 c 是扣除医疗开支后的消费。

保险：

- 该家庭可以购买 b 单位的保险保障。
- 若患病，保险将报销金额为 b 的医疗开支。
- 保险费为 p (无论健康与否均需支付)。

公平保费（精算公平保险）：

- 若保费能使保险公司的期望利润为零，则称之为“公平”。
- 保险公司的期望利润为：

$$(1 - q) \cdot p + q \cdot (p - b) = 0$$

- 解出 p ：

$$p - qb = 0 \Rightarrow p = qb$$

- 公平保费等于期望赔付额。

5.1.2.2 家庭会购买多少保险？

若家庭可以选择 b ，则最优的 b 能使期望效用最大化：

$$\max_b EU = q \cdot u(W - qb - d + b) + (1 - q) \cdot u(W - qb)$$

对 b 的一阶条件：

$$q \cdot u'(W - qb - d + b) \cdot (1 - q) + (1 - q) \cdot u'(W - qb) \cdot (-q) = 0$$

化简：

$$u'(W - qb - d + b) = u'(W - qb)$$

由于 u' 严格递减（风险厌恶），这意味着：

$$W - qb - d + b = W - qb$$

解出：

$$\boxed{b = d}$$

结论：在公平保费（ $p = qb$ ）下，家庭的最优选择是购买**完全保险**（ $b = d$ ）。家庭被**完美地保障**了，消除了所有的消费风险。

5.1.2.3 引入异质性

现在假设存在两类个体：

- 低风险类型：患病概率 q_L
- 高风险类型：患病概率 q_H
- 假设 $q_L < q_H$

在完美信息下，保险公司能区分低风险和高风险个体。

- 低风险个体支付公平保费： $p_L = dq_L$
- 高风险个体支付公平保费： $p_H = dq_H$
- 两类人都购买完全保险（ $b = d$ ）。

5.1.2.4 引入信息不对称

现在考虑**信息不对称**：

- 保险公司**无法**区分低风险和高风险个体。
- 如果公司继续提供两份完全保险合同（一份保费为 dq_L ，另一份为 dq_H ），那么：
 - 所有人都会选择保费为 dq_L 的更便宜的合同。
 - 这份合同变得不可持续，因为它吸引了两种类型的人，但只按低风险定价。
- 在信息不对称下，可能产生两种均衡：
 - **混同均衡**：两类人购买相同的保险合同。
 - **分离均衡**：不同类型的人通过自我选择进入不同的、旨在揭示其风险类型的合同。

5.1.3 信息不对称下的均衡

在信息不对称下，保险市场可能产生两种均衡：

1. 混同均衡

- 只提供一份保险合同，**高风险和低风险个体都购买同一份合同**。
- 保费基于人口的平均风险设定：

$$p = d \cdot (\lambda q_H + (1 - \lambda)q_L)$$

其中 λ 是高风险个体的比例。

- **问题**：低风险个体被过度收费（支付超过其公平保费），而高风险个体得到补贴。
- **结果**：可以证明，**在完全竞争的保险市场中不存在混同均衡**。竞争者总可以提供一份仅吸引低风险个体的合同，从而获得正利润并打破混同合同。

2. 分离均衡

- 提供两份不同的合同，旨在让**不同风险类型的人自我选择进入不同的合同**：
 - **合同 H**：高保费，但提供完全保险（ $b = d$ ）。该合同对高风险个体有吸引力。
 - **合同 L**：低保费，但提供部分保险（ $b < d$ ）。该合同为低风险个体设计。
- 高风险个体选择合同 H，因为他们风险更高，因而更看重完全保险。
- 低风险个体选择合同 L，因为他们更偏好低保费而非完全保障。
- **关键观察**：在分离均衡中，**低风险个体没有被完全保障**。与完全信息情形相比，这代表了**效率损失**。
- **存在性**：在一个完全竞争的市场中，如果合同是激励相容的，且不存在任何有利可图的偏离，那么在特定条件下，分离均衡可能存在。

5.1.4 道德风险

购买保险后，个体可能会改变其行为：

- **减少预防措施**，以降低进入不利状态的概率（例如，减少健康预防）。
- **增加停留在不利状态的概率**（例如，失业保险）。
- **在不利状态时增加开支**（例如，医疗保险）。

当然，社会保险并非毫无缺点，也需要权衡取舍。其优缺点可总结如下：

- **收益**：在不同状态（健康 vs. 患病，就业 vs. 失业）下平滑消费。
- **成本**：道德风险——个体可能减少避免不利状态的努力，或一旦获得保险就消费更多。

如何缓解道德风险？

- **部分保险**：不赔付 100% 的损失（例如，设置共付额、起付线），以维持预防的激励。

- **加强监督**：通过更好的监管来减少机会主义行为。

5.1.5 社会保险存在的理由：以医疗保险为例

- **缓解逆向选择**：强制参保消除了逆向选择螺旋。
 - **再分配功能**：所有人保费相同；低风险个体间接补贴高风险个体。
 - 从政府角度看，健康风险很大程度上是外生的，因此向高风险个体进行再分配可能是社会期望的。
- **更低的管理成本**：社会保险体系的管理费用通常低于私人保险。
- **基本医疗作为一项权利**：获得基本医疗服务被视为一项基本权利。
- **再分配**：社会保险天然地将收入从健康者再分配给病患，从富人再分配给穷人。
- **外部性**：医疗保健具有公共物品特性——例如，传染病的预防和治疗惠及整个社会。
- **短视**：如果没有强制保障，个体可能目光短浅，对未来风险保障不足。

5.2 养老保险

想象一下你已经 70 岁了，不能再工作赚钱了。你将如何养活自己？你存够钱了吗？你的家人会照顾你吗？这些是经济学中关于老龄化和退休问题的重要议题。

个体的劳动能力自然会随着年龄增长而下降，但退休后的消费需求并不会消失。由 Franco Modigliani 提出的经典生命周期模型（他因此贡献于 1985 年获得诺贝尔经济学奖）预测：

- 在没有任何政府计划的情况下，理性的个体将在工作期间储蓄，以支付退休后的消费。
- 这就是经典的“消费平滑”行为：个体在收入高时储蓄，在收入低时动用储蓄。

然而在实践中，若没有社会养老保险体系，许多人会持续工作直至身体无法承受，常常工作到离世，然后依靠家庭成员供养。结果，在缺乏正规退休计划时，老年人的贫困率往往很高。这种前瞻性储蓄行为的理论预测与现实私人养老金准备不足之间的差距，正是社会保障和养老金体系存在的动因。现在我们转向经济学中的养老金问题，探究政府为何干预，以及不同的养老金体系如何运作。

5.2.1 养老金体系存在的理由

存在若干经济上的理由来支持公共养老金体系：

个体失灵 (Individual Failures)：

- 个体可能短视 (myopic)，未能为退休进行充足的储蓄，导致私人养老金准备不足。

市场失灵 (Market Failures)：

- 私人年金市场中的逆向选择：保险公司无法区分预期寿命低的个体和预期寿命高的个体，导致市场低效甚至崩溃。

收入再分配 (Redistribution)：

- 养老金体系可以在同一代人内部（代内再分配）和不同代人之间（代际再分配）进行收入再分配。

5.2.2 养老金管理的两种主要模式

5.2.2.1 定义与关键特征

养老金体系可以按两种根本不同的方式组织：

- **现收现付制 (Pay as you go)：**
 - 支付给当前退休者的养老金，直接来自当前工作者的缴费。

- 存在代际联系：每一代人的养老金都由下一代人负担。
- 当期养老金支出 = 当期养老金缴费收入。

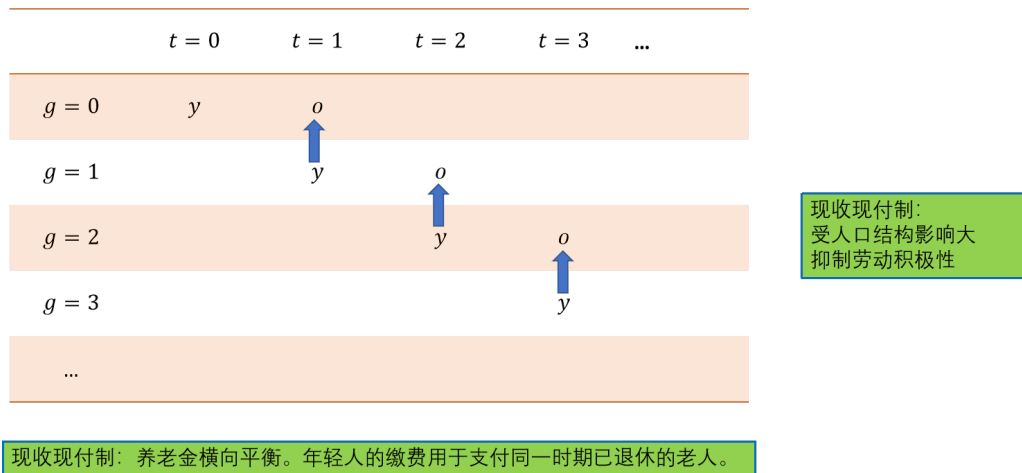


图 5.3: 现收现付制

完全基金制 (Fully funded):

- 工作者的缴费被投资于金融资产，这些资产（及其收益）被用于支付他们自己未来的退休金。
- 没有代际联系：每一代人自己为自己养老。
- 当期养老金支出 = 过去的缴费 + 过去缴费的投资收益。

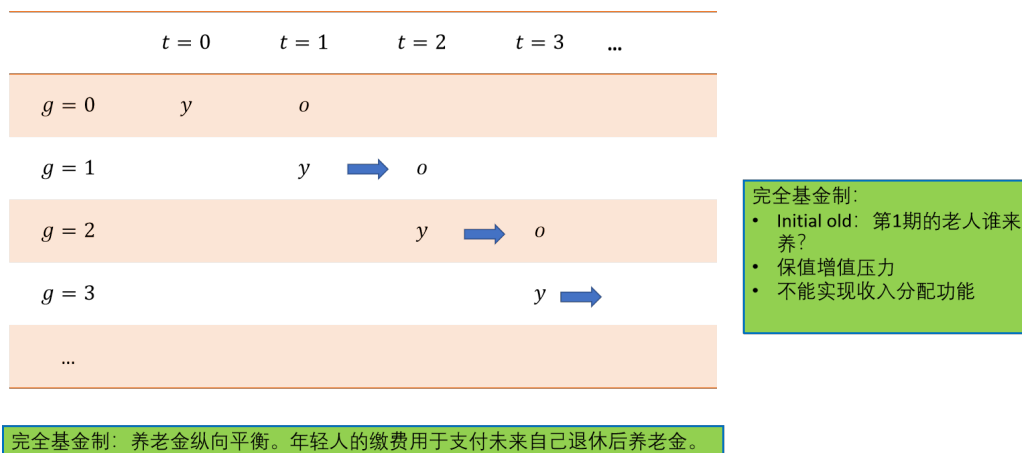


图 5.4: 完全基金制

5.2.2.2 模型设定

考虑一个两期的**世代交叠 (OLG) 模型**。第 t 代人出生于 t 期，在 $t+1$ 期变老。第 t 代每个成员的工资为 w_t ，第 t 代的人口规模为 N_t 。

现收现付制 (PAYG)

- 第一代退休者在没有缴费的情况下领取养老金（初始老年人获得了一笔无偿转移支付）。

- 对于在 t 期出生的个体：

$$T_t = \tau w_t \quad (\text{年轻时的缴费})$$

$$B_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1} N_{t+1}}{N_t} \quad (\text{年老时的养老金})$$

- 这可以改写为：

$$B_{t+1} = \tau w_t \times \frac{w_{t+1} N_{t+1}}{w_t N_t} = \tau w_t (1+g)(1+n)$$

其中：

- $g = \frac{w_{t+1} - w_t}{w_t}$ 是工资增长率（劳动生产率增长）

- $n = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t}$ 是人口增长率

- 现收现付制的隐含回报率为：

$$\varphi = (1+g)(1+n) - 1 = g + n + gn \approx n + g$$

完全积累制

- 每一代人都进行储蓄和投资，获取市场利率 r 。
- 对于在 t 期出生的个体：

$$T_t = \tau w_t \quad (\text{年轻时的缴费})$$

$$B_{t+1} = T_t(1+r) = \tau w_t(1+r)$$

- 完全积累制的回报率就是市场利率 r 。
- 没有代际转移支付：每一代人自己为自己的退休负责。

比较：

- 现收现付制的回报率取决于工资增长率 g 和人口增长率 n ： $\varphi \approx n + g$
- 积累制的回报率取决于市场利率 r
- 若 $r > n + g$ ，积累制提供的回报更高；若 $r < n + g$ ，现收现付制更具吸引力。
- 这一比较是养老金改革争论的核心，尤其是在 n 较低或为负的老齡化社会。

5.2.3 关于现收现付制的进一步探讨

- **Samuelson (JPE 1958)**：在一个没有资本、无法储存物品（“巧克力经济”）的世代交叠经济中，现收现付养老金体系可以带来帕累托改进，因为它能实现代际交易。[这与法定货币的效果相同。]
- **Diamond (AER 1965)**：在一个有资本和储蓄的世代交叠经济中，当且仅当 $\varphi > r$ 时，现收现付养老金体系才会产生帕累托改进，其中 φ 是现收现付制的隐含回报率， r 是市场利率。
 - 若 $\varphi < r$ ，现收现付制会将所有未来世代的收入再分配给初始退休者。

若 $\varphi < r$ ：代际再分配

- 初始老年一代的收益：

- 人均收益： $B_1 = \frac{\tau w_1 N_1}{N_0}$

- 总收益： $N_0 B_1 = \tau w_1 N_1$

- 第 t 代 ($t \geq 1$) 的损失：

$$V_t = T_t - \frac{B_{t+1}}{1+r} = \tau w_t - \frac{\tau w_t(1+\varphi)}{1+r}$$

- 所有未来世代的总损失：

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{N_t V_t}{(1+r)^{t-1}} = \tau \sum_{t=1}^{\infty} \frac{N_1(1+n)^{t-1} w_1(1+g)^{t-1} (r-\varphi)}{(1+r)^{t-1}} = \tau w_1 N_1$$

- 这表明未来世代的总损失恰好等于第一代人的初始收益。

5.2.4 养老金与短视

- 个体存活两期：
 - 第一期：工作，挣工资 w ，选择消费 c_1 和储蓄 s
 - 第二期：退休，消费含利息 R 的储蓄： $c_2 = sR$
- 两类个体：
 - 理性：效用 $u(c_1) + \delta u(c_2)$
 - 短视：效用 $u(c_1)$ （完全短视）
 - 部分短视：效用 $u(c_1) + \delta\beta u(c_2)$ ，其中 $0 < \beta < 1$
- 从社会角度看，真实的效用函数是 $u(c_1) + \delta u(c_2)$ 。

如果建立一个三期短视模型，那么

$$U_1 = u(c_1) + \delta\beta[u(c_2) + \delta u(c_3)]$$

$$U_2 = u(c_2) + \delta\beta u(c_3)$$

5.2.4.1 储蓄决策：理性 vs. 短视

- 理性个体（及社会最优）：

$$\max_s u(w - s) + \delta u(sR)$$

一阶条件：

$$u'(w - s) = R\delta u'(sR)$$

这决定了最优储蓄 $s^* > 0$ 。

mybigthm 示例：若 $\delta = 1$ 且 $R = 1$ ，则 $s^* = \frac{w}{2}$ 。

- 短视个体：

$$\max_s u(w - s) \quad \text{s.t.} \quad c_2 = sR$$

假设存在借贷约束（不能以未来收入为抵押借款），最优储蓄为：

$$s = 0$$

含义：

- 短视个体为退休储蓄得太少（甚至为零），导致老年时消费不足。
- 这为**强制性养老金体系**（强制个体储蓄）提供了理由。
- 短视程度（ β ）决定了需要多大程度的干预。

5.2.4.2 强制性养老金参与

如果政府强制要求参加养老金体系：

- 第一期的缴费： s^* （设定为等于社会最优储蓄水平）
- 第二期的养老金收益： $b = s^*R$

在加入强制性养老金体系后：

- 一个**理性个体**选择私人储蓄 s 以最大化：

$$\begin{aligned} \max_s \quad & u(c_1) + \delta u(c_2) \\ \text{s.t.} \quad & c_1 + s + s^* = w \\ & c_2 = sR + s^*R \end{aligned}$$

这等价于最大化：

$$u(w - s^* - s) + \delta u(sR + s^*R)$$

一阶条件：

$$u'(w - s^* - s) = R\delta u'(sR + s^*R)$$

回想一下，社会最优储蓄 s^* 满足：

$$u'(w - s^*) = R\delta u'(s^*R)$$

对比这些条件，我们得到：

$$s = 0$$

结论： 对于理性个体而言，强制性养老金储蓄完全挤出了私人储蓄。总储蓄保持在最优水平 s^* 。

- 对于一个**短视个体**（他只关心当期消费）：

$$\max_s u(c_1) \quad \text{s.t.} \quad c_1 + s + s^* = w, \quad c_2 = sR + s^*R$$

这简化为最大化 $u(w - s^* - s)$ 。

- **如果不允许借款**（不能以未来养老金收入为抵押借款）： $s = 0$
- **如果允许借款**：银行知道该个体将在第二期收到 s^*R ，并可能以此未来收入为抵押发放贷款。短视个体会尽可能多地借款： $s = -s^*$
- **现实中**，通常无法以未来的养老金权益为抵押借款。因此，相关的情形是 $s = 0$ 。

5.2.5 小结

关键点

- **社会最优储蓄：** s^*
- **没有养老金体系时：**
 - 理性个体储蓄 s^*
 - 短视个体储蓄 0
- **有强制性养老金体系时（缴费 s^* ）：**
 - **理性个体：** 私人储蓄 = 0，养老金储蓄 = s^* ，总储蓄 = s^*
 - **短视个体（不允许借款）：** 私人储蓄 = 0，养老金储蓄 = s^* ，总储蓄 = s^*
 - **短视个体（允许借款）：** 私人储蓄 = $-s^*$ ，养老金储蓄 = s^* ，总储蓄 = 0（但借款通常不可行）
- **结论：** 强制性养老金体系并未改变理性个体的总储蓄（存在挤出效应），但它迫使短视个体进行储蓄，从而实现了社会最优水平。

5.2.6 对劳动供给的影响

将劳动供给引入前面的两期世代交叠模型，我们可以得到以下设定：

- 在第一期，个体选择劳动供给 l_1 , $0 \leq l_1 \leq 1$ （工作时间所占的比例）。
- 第一期的消费：

$$c_1 = (1 - \tau)wl_1 - s$$

其中 τ 是养老金缴费率， w 是工资率， s 是私人储蓄。

- **问题：** 缺少了什么关键假设？
 - 我们需要设定劳动的负效用（闲暇的价值）。
 - 令 $e_1 = 1 - l_1$ 为第一期的闲暇时间。
 - 闲暇带来的效用由 $h(e_1)$ 给出，且 $h' > 0$, $h'' < 0$ 。
- 第一期的效用变为：

$$u(c_1) + h(e_1)$$

理性个体最大化终身效用：

$$\max_{l_1, s} u(c_1) + h(1 - l_1) + \delta u(c_2)$$

受约束于：

$$c_1 = (1 - \tau)wl_1 - s$$

$$c_2 = R(s + \tau wl_1)$$

消去 s ，我们得到跨期预算约束：

$$c_1 + \frac{c_2}{R} = wl_1$$

引理 5.1

预算约束与 τ 无关！养老金体系相当于被私人储蓄完全抵消的强制储蓄。



对于理性个体而言，养老金体系 **不影响劳动供给**。最优的 l_1 仅由消费与闲暇之间的权衡决定，与 τ 无关。

短视个体只关心当期效用：

$$\max_{l_1, s} u(c_1) + h(1 - l_1)$$

受同样的约束，且 $s \geq 0$ （借贷约束）。显然，最优私人储蓄为 $s = 0$ （短视个体不储蓄）。

将 $s = 0$ 代入约束：

$$c_1 = (1 - \tau)wl_1, \quad c_2 = \tau wl_1 R$$

短视个体的问题简化为：

$$\max_{l_1} u((1 - \tau)wl_1) + h(1 - l_1)$$

一阶条件：

$$\underbrace{(1 - \tau)w u'((1 - \tau)wl_1)}_{\text{边际收益}} = \underbrace{h'(1 - l_1)}_{\text{边际成本}}$$

该一阶条件将劳动供给 l_1 确定为 τ 的函数：

$$(1 - \tau)w u'((1 - \tau)wl_1) = h'(1 - l_1)$$

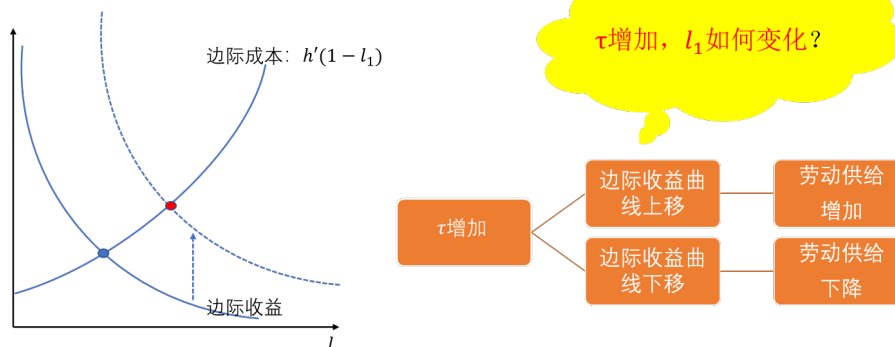


图 5.5: 对劳动供给的影响：短视个体

边际收益曲线如何随 τ 变动？

$$\begin{aligned} \frac{\partial MB}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \tau)w u'((1 - \tau)wl_1)] \\ &= -wu'(c_1) + (1 - \tau)w u''(c_1) \cdot (-wl_1) \\ &= -wu'(c_1) - (1 - \tau)w^2 l_1 u''(c_1) \\ &= w [-u'(c_1) - c_1 u''(c_1)] \end{aligned}$$

经济直觉

$\frac{\partial MB}{\partial \tau}$ 的符号取决于效用函数的曲率：

$$\frac{\partial MB}{\partial \tau} = w [-u'(c_1) - c_1 u''(c_1)]$$

- 若 $-u'(c_1) - c_1 u''(c_1) > 0$ ，则 $\frac{\partial MB}{\partial \tau} > 0$ ：较高的 τ 会增加工作的边际收益 $\Rightarrow$ 劳动供给增加。
- 若 $-u'(c_1) - c_1 u''(c_1) < 0$ ，则 $\frac{\partial MB}{\partial \tau} < 0$ ：较高的 τ 会减少工作的边际收益 $\Rightarrow$ 劳动供给减少。

因此，强制性养老金对短视个体劳动供给的影响在理论上是模糊的。

小结

- **理性个体**：养老金体系不影响劳动供给（通过私人储蓄完全挤出）。
- **短视个体**：
 - 他们不进行私人储蓄（ $s = 0$ ）。
 - 劳动供给由税后消费与闲暇之间的权衡决定。
 - 增加 τ 对劳动供给的影响是模糊的，取决于个体的风险厌恶程度和效用函数的曲率。

一个直观解释

回顾短视个体的问题：

$$\max_{l_1} u((1-\tau)wl_1) + h(1-l_1)$$

或者，用消费 c_1 和闲暇 $e_1 = 1 - l_1$ 来表示：

$$\max_{c_1, e_1} u(c_1) + h(e_1) \quad \text{s.t.} \quad c_1 = (1-\tau)w(1-e_1)$$

重写预算约束：

$$\frac{1}{(1-\tau)w}c_1 + e_1 = 1$$

经济解释

这相当于一个标准的两商品消费者选择问题：消费 c_1 （价格 $p_c = \frac{1}{(1-\tau)w}$ ）和闲暇 e_1 （价格 $p_e = 1$ ），时间总禀赋标准化为 1。

τ 增加如何影响劳动供给？如果你的日薪原来是 500 元，现在降到了 50 元，你倾向于增加还是减少劳动供给？当 τ 增加时：

- 税后工资 $(1-\tau)w$ 下降。
- 这意味着消费的价格 $p_c = \frac{1}{(1-\tau)w}$ 上升。
- 闲暇的价格 $p_e = 1$ 保持不变。

回想微观经济学：当一种商品的价格上升时，

- **替代效应**：用相对便宜的商品（闲暇）替代更昂贵的商品（消费） $\Rightarrow$ 闲暇增加，劳动供给减少。
- **收入效应**：价格上升减少了实际收入 $\Rightarrow$ 如果两者都是正常品，对两种商品的需求都可能减少 $\Rightarrow$ 闲暇减少，劳动供给增加。

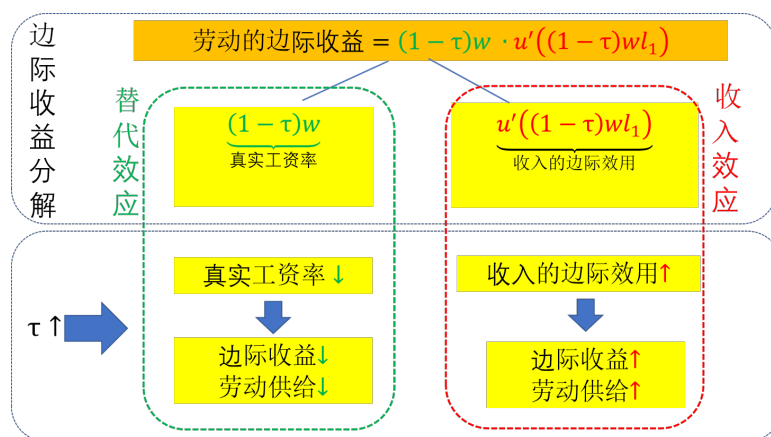


图 5.6: τ 增加的替代效应和收入效应

效应总结

- **替代效应**: $\tau \uparrow \Rightarrow p_c \uparrow \Rightarrow e_1 \uparrow \Rightarrow l_1 \downarrow$
- **收入效应**: $\tau \uparrow \Rightarrow$ 实际收入 $\downarrow \Rightarrow e_1 \downarrow \Rightarrow l_1 \uparrow$

结论

提高养老金缴费率 τ 对劳动供给的净效应在**理论上是模糊的**：

$$\text{总效应} = \text{替代效应}(l_1) + \text{收入效应}(l_1)$$

劳动供给是增加还是减少，取决于哪种效应占主导。这与劳动经济学的标准结论一致：工资变动对劳动供给的影响是模糊的，因为存在方向相反的收入效应和替代效应。

5.3 社会保险的实证研究

5.3.1 Wang et.al, JPubE 2024: 新农合与创业

要点

- 公共医疗保险极大地促进了中国农村的创业活动。
- 它提高了家庭参与创业工作的概率和工作时长。
- 其影响在事先健康风险方面呈 U 形。
- 总体而言，它促进了农村小商户的发展。
- 公共医疗保险促进了农村家庭在医疗保健之外的财务决策。

- **研究主题：**新型农村合作医疗（NCMS）对创业的影响

- 个体是风险厌恶的。
- 存在健康风险时，没有医疗保险的个体更倾向于选择低风险工作，规避创业带来的额外风险。
- 有了医疗保险，成为企业家的意愿会增强。

- **数据来源**

CHNS 提供了一个具有全国代表性的纵向调查数据集。它采用多阶段随机整群抽样，从 15 个省、自治区和直辖市抽取了超过 7,200 户家庭，涉及 30,000 多个个体。

该调查包含丰富的个体层面信息，涵盖人口统计学、健康、时间利用和教育；家庭层面的收入和家庭结构数据；以及社区层面的特征，如当地市场条件、公共卫生和社会服务基础设施等

- **样本筛选标准**

1. 仅保留拥有农村户口（农业户口）的样本。
2. 仅保留户主及其配偶在整个调查期间未发生变化的样本。
3. 设置年龄下限：仅保留首次出现在调查中时已年满 18 岁的个体。
4. 排除在 NRCMS 实施当年接受调查的观测值。

总体而言，分析样本包含**11,354 个观测值**，来自**2,041 户家庭**，覆盖**36 个县**的**119 个农村社区**。

基于微观数据的识别策略：DID 方法

$$Y_{hct} = \beta_1 NRCMS_{ct} + \beta_2 X_{ht} + \beta_3 \Theta_h \times f(t) + \beta_4 \Gamma_c \times f(t) + \beta_5 Z_{ct} + \delta_h + \gamma_t + \epsilon_{hct}$$

- Y_{hct} ：第 t 年、县 c 中家庭 h 的结果变量
- $NRCMS_{ct}$ ：到第 t 年，县 c 是否已实施 NCMS
- X_{ht} ：家庭特征
- $\Theta_h \times f(t)$ ：家庭特征 $\times$ 时间趋势
- $\Gamma_c \times f(t)$ ：县特征 $\times$ 时间趋势

- Z_{ct} : 县特征
- δ_h : 家庭固定效应
- γ_t : 年份固定效应

职业分类

- 高风险职业:
 - 小型企业自雇（创业）
 - 私营部门有酬工作
- 低风险职业:
 - 农业工作
 - 公共部门有酬工作

Table 2
Effects of the NRCMS on household head's labor supply in high-risk occupations.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	Participation (extensive margin)			Log hours worked (intensive margin)		
NRCMS	0.096*** (0.030)	0.093*** (0.030)	0.083*** (0.028)	0.700*** (0.214)	0.677*** (0.216)	0.593*** (0.202)
Household and year FE	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Household controls and trends		✓	✓		✓	✓
County trends			✓			✓
R-squared	0.015	0.019	0.025	0.016	0.021	0.027
No. of households	2,041	2,041	2,041	2,041	2,041	2,041
Observations	11,354	11,354	11,354	11,354	11,354	11,354
Pre-program outcome mean	0.253	0.253	0.253	540	540	540

Notes: This table reports the estimated effect of the NRCMS on participation in high-risk work of household heads in rural China. The regression model is specified in Eq. (1). Dependent variables are the participation dummy in Columns 1–3 and the log annual working hours in Columns 4–6. Household controls include the age and age squared of the household head. Household trends include sets of household pre-determined characteristics, including an indicator of the head's being female and indicators for the highest educational attainment for the head and the spouse, interacting with quadratic time trends. County trends include quartile dummies of various pre-program county characteristics interacted with quadratic time trends. The set of county characteristics includes average household income, share of rural population, and index for local government's fiscal capacity (index of transportation infrastructure and index of public services). See Online Appendix Table B3 for more details. Pre-program outcome mean measured in level terms is listed at the bottom row. The outcome means in Columns 4–6 is measured in hours. Robust standard errors clustered at the county level are reported in parentheses. *** <0.01, ** <0.05, * <0.1.

新农合使得高风险工作的参与率增加8.3个百分点，使高风险工作的参与时间增加59.3%。

图 5.7: 基于微观家庭数据的回归结果

5.3.2 García-Miralles & Leganza, JPubE 2024: 联合退休

要点

- 当夫妻中一方达到领取养老金年龄时，许多夫妻会一同退休。
- 我们揭示了这些夫妻实现共同退休的路径。
- 年龄差异至关重要：年长的一方会等待其伴侣也具备领取资格。
- 我们也强调了性别和配偶间相对收入的作用。
- 一项提高养老金领取年龄的改革也产生了类似的配偶溢出效应。

- **制度背景：**在丹麦的退休体系中，老年养老金（OAP）为老年人提供普遍性的退休收入保障，而自愿提前退休养老金（VERP）则为选择参加该计划的人提供提前退休福利。
- **数据：**丹麦全人口行政数据库，1986–2014 年
- **变量定义：**
 - 退休：定义为个体停止获得劳动收入的状态。
 - 养老金领取：定义为个体在某一年份领取任何形式的养老金（包括 VERP 和 OAP）的状态。
 - 劳动市场收入：个体的总应税劳动市场收入。
 - 财富：包括个体和家庭的总资产（不包括房产和养老金财富）。
- **样本选择：**

- 夫妻定义：样本中的夫妻包括已婚、注册伴侣或同居配偶。为避免因在领取养老金年龄附近婚姻状况变化引起的内生性问题，我们在双方都未满 60 岁时确定其婚姻状况，并在后续观察中维持该状态。
- 年龄限制：分析样本限定为年龄差距不超过 8 岁的夫妻，以减少因年龄差过大带来的异质性。
- 双职工夫妻：选择在 55 至 59 岁之间至少有一年劳动收入的配偶。排除自雇个体和领残疾津贴个体。
- 观察窗口：为分析领取养老金年龄对退休行为的影响，文章选取个体年龄在 57 至 60 岁之间的样本。

识别策略：达到 60 岁对自身退休决策的影响

$$y_{it} = \alpha + \beta_1(age_{it} - 60) + \beta_2\{age_{it} \geq 60\} + \beta_3\{age_{it} \geq 60\} \cdot (age_{it} - 60) + \sum_{c=1991}^{2013} \kappa_c D_c + \epsilon_{it}$$

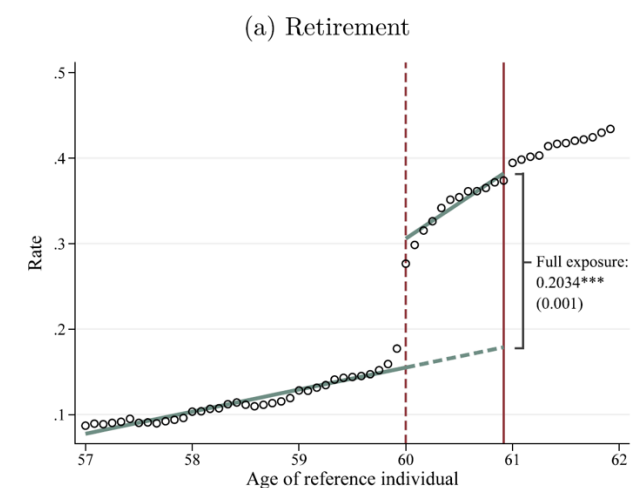


图 5.8: 自身退休决策

识别策略：达到 60 岁对配偶退休决策的影响

$$y_{it}^s = \alpha + \beta_1(age_{it} - 60) + \beta_2\{age_{it} \geq 60\} + \beta_3\{age_{it} \geq 60\} \cdot (age_{it} - 60) + \sum_{a=49}^{69} \delta_a \cdot D_a^s + \sum_{a=49}^{69} \gamma_a \cdot D_a^s \cdot D_g + \sum_{c=1991}^{2013} \kappa_c \cdot D_c + \epsilon_{it}$$

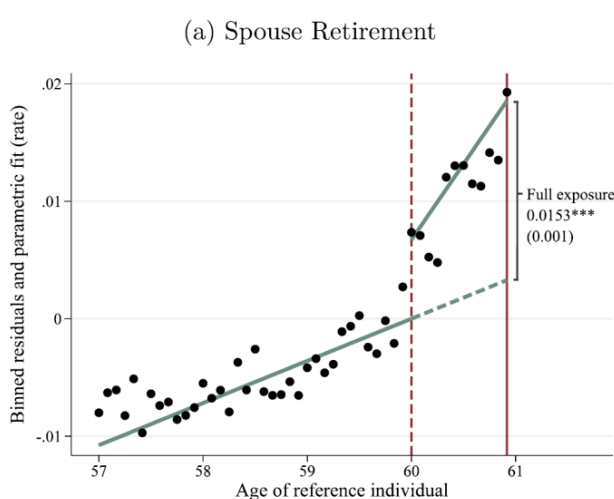


图 5.9: 配偶的退休决策

下表展示了回归结果。

Table 1
The effect of reaching pension eligibility age.

	Retirement	Claiming	Earnings
Reference individual	0.2034*** (0.001)	0.3496*** (0.001)	-8,642*** (69)
Spouse	0.0153*** (0.001)	0.0120*** (0.001)	-848*** (61)
Scaled effect	0.0750*** (0.007)	0.0344*** (0.003)	0.0981*** (0.012)
N. of clusters	367,585	367,585	367,585
Observations	2,206,044	2,206,044	2,206,044

达到提前退休年龄，使个体退休比率增加20.34个百分点，使配偶退休比例增加1.53个百分点。
每100个达到提前退休年龄而退休的个体，有7.5个配偶也会共同退休。

图 5.10: 基准结果

Table 5
Heterogeneity in the effect of reaching pension eligibility age on retirement by age difference, gender, and relative earnings.

Spouse	Age difference		Gender		Relative earnings	
	Old (1)	Young (w) (2)	Male (3)	Female (w) (4)	Primary (5)	Secondary (w) (6)
Reference individual	0.2562*** (0.002)	0.1893*** (0.002)	0.2668*** (0.002)	0.1788*** (0.003)	0.2423*** (0.002)	0.1975*** (0.002)
Spouse	0.026*** (0.002)	0.007*** (0.001)	0.020*** (0.002)	0.025*** (0.003)	0.020*** (0.001)	0.021*** (0.002)
Scaled effect	0.0994*** (0.010)	0.0414*** (0.010)	0.0745*** (0.009)	0.139*** (0.018)	0.0747*** (0.009)	0.107*** (0.014)
N. of clusters	297,686	334,966	302,589	330,172	300,312	332,422
Observations	1,038,096	1,167,948	1,054,359	1,151,685	1,056,592	1,149,452

Notes: This table reports the effect of the reference individuals reaching pension eligibility age on their own retirement and on their spouses' retirement, distinguishing heterogeneous responses by age differences within the couple, by gender, and by relative earnings between partners. For each heterogeneity cut, the columns marked with (w) are reweighted to be comparable to the remaining sample. For example, columns (1) and (2) show a split by age difference within the couple, and column (2) is reweighted to have the same joint distribution of gender and relative income as column (1). Likewise, column (4) is reweighted to have the same joint distribution of age difference and relative income as column (3), and column (6) is reweighted to have the same joint distribution of age differences and gender as column (5). The first row reports the full-exposure effect of pension eligibility on own retirement. The second row reports the full-exposure effect on spouses of their partners being eligible for retirement pension. The third row reports the scaled effect resulting from dividing the spouse full-exposure effect by the reference individual full-exposure effect. Robust standard errors in parentheses, clustered at the couple level. Bootstrapped standard errors for scaled effects. *** $p < 0.01$, ** $p < 0.05$, * $p < 0.1$.

图 5.11: 异质性分析

异质性分析表明：

- 年长的配偶具有更大的联合退休效应。
- 女性更有可能与丈夫一起联合退休。
- 收入较低的个体更倾向于联合退休。

5.3.3 Farré & González, JPubE 2019: 生育时机与后续生育

要点

- 西班牙实施的两周带薪陪产假导致了后续生育的延迟。
- (刚好) 有权享受新假的父母要花更长时间才会再要孩子。
- 符合条件的夫妇在未来六年内再生育一个孩子的可能性更低。
- 我们为两个可能互补的影响渠道提供了证据。

• 制度背景

- 2007 年，西班牙引入了 13 天的陪产假政策。
- 该政策适用于 2007 年 3 月 24 日及之后出生的孩子。

• 潜在渠道：陪产假如何影响生育率

- 渠道 1：母亲就业 $\uparrow \Rightarrow$ 生育的机会成本 $\uparrow \Rightarrow$ 生育率 $\downarrow$
- 渠道 2：父亲的育儿时间 $\uparrow \Rightarrow$ 父亲更深刻地认识到育儿的高成本 $\Rightarrow$ 生育意愿 $\downarrow \Rightarrow$ 生育率 $\downarrow$

识别策略：断点回归

- 样本：在 3 月 24 日前几周和后几周分娩的家庭

$$Y_{id} = \alpha + \beta T_{id} + \gamma_1 f(d) + \gamma_2 f(d)T_{id} + \delta X_{id} + \epsilon_{id}$$

- i : 家庭, d : 分娩日期
- Y_{id} : 至下一胎的时间间隔; 家庭在 2 年、4 年或 6 年内是否再生育
- T_{id} : 孩子是否在 3 月 24 日之后出生

Table 1
Effect of paternity leave on birth spacing (days to subsequent birth).

Window	Opt. band.	± 7 days	± 21 days	± 56 days	± 77 days	± 90 days	± 90 d. (donut)
Panel A. All ages							
Paternity leave	27.1* (13.6)	20.7 (11.9)	27.8* (13.8)	20.5** (8.8)	16.0** (7.2)	32.5*** (10.4)	38.2** (15.3)
Mean	1248	1251	1249	1250	1249	1249	1249
Effect as % of mean	2.2%	1.7%	2.2%	1.6%	1.3%	2.6%	3.1%
Linear trends	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
Quadratic trends	N	N	N	N	N	Y	Y
Day of the week	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
N	18,329	6473	19,246	51,628	71,341	83,480	77,007

产假之后，生育间隔上升。

图 5.12: 对生育间隔的影响

识别策略：双重差分法处理季节性波动

- 样本：在 2006 年（对照组）、2007 年（处理组）和 2008 年（对照组）的 3 月 24 日前后分娩的家庭

$$Y_{idt} = \alpha + \beta_1 T_{idt} + \beta_2 T_{idt} I_{2007} + \gamma f(\delta) + \theta X_{id} + \mu_t + \epsilon_{id}$$

- T_{idt} : 是否在 3 月 24 日之后
- I_{2007} : 是否为 2007 年

Appendix Table 4

Effect of paternity leave on birth spacing (days to subsequent birth), difference-in-difference specification.

Window	All ages				Older mothers (>30)	
	±77 days	±77 days	Full year	Full year	±77 days	Full year
Paternity leave	7.61*** (4.65)	8.02* (4.70)	6.97** (3.51)	6.98** (3.47)	15.47** (6.25)	12.39** (4.86)
Mean	1251	1251	1221	1221	1194	1165
Effect as % of mean	0.6%	0.6%	0.6%	0.6%	1.3%	1.1%
N	204,756	204,756	506,936	506,936	100,857	238,058
Day of the week	N	Y	N	Y	N	Y
Linear trend	Y	Y	Y	Y	Y	Y
Cubic trend	N	Y	N	Y	N	Y

图 5.13: 双重差分结果

Table 2 Effect of paternity leave on subsequent fertility.							
Window	Opt. band.	±7 days	±21 days	±56 days	±77 days	±90 days	±90 d. (donut)
Panel A. All ages							
Two years							
Paternity leave	-0.0097* (0.0053)	-0.0068*** (0.0048)	-0.0097* (0.0053)	-0.0050 (0.0031)	-0.0050** (0.0025)	-0.0084** (0.0036)	-0.0086* (0.0049)
Average	0.066	0.064	0.066	0.067	0.067	0.067	0.067
Coeff./average	-14.8%	-10.6%	-14.8%	-7.5%	-7.2%	-12.6%	-12.9%
Four years							
Paternity leave	-0.0154** (0.0068)	-0.0066 (0.0057)	-0.0120* (0.0061)	-0.0018 (0.0044)	-0.0059 (0.0038)	-0.0101* (0.0054)	-0.0118 (0.0085)
Average	0.239	0.238	0.239	0.239	0.239	0.240	0.240
Coeff./average	-6.4%	-2.8%	-5.0%	-0.8%	-2.5%	-4.2%	-4.9%
Six years							
Paternity leave	-0.0179* (0.0091)	-0.0093 (0.0070)	-0.0129 (0.0085)	-0.0023 (0.0050)	-0.0071* (0.0043)	-0.0116* (0.0059)	-0.0115 (0.0108)
Average	0.339	0.336	0.338	0.338	0.337	0.339	0.339
Coeff./average	-5.3%	-2.8%	-3.8%	-0.7%	-2.1%	-3.4%	-3.4%
Linear trend	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
Quadratic trend	N	N	N	N	N	Y	Y
Day of the week	Y	N	Y	Y	Y	Y	Y
N	(varying)	18,174	53,693	144,055	199,558	232,484	214,310

产假之后，再次生育概率下降。

图 5.14: 对后续生育的影响

机制 1: 对劳动市场的影响

Table 3
Effect of paternity leave on labor market outcomes.

	Father			Mother		
	±3 months	±6 months	±9 months	±3 months	±6 months	±9 months
Working after 6 months	-0.003 (0.006)	0.001 (0.009)	0.010 (0.012)	0.040*** (0.009)	0.038*** (0.013)	0.025 (0.017)
Working after 12 m.	-0.003 (0.007)	0.008 (0.010)	-0.001 (0.012)	0.025*** (0.009)	0.031** (0.013)	0.028* (0.017)
Working after 24 m.	-0.008 (0.008)	0.008 (0.012)	0.008 (0.015)	0.011 (0.009)	0.027** (0.014)	0.036** (0.017)
On leave after 6 m.	0.000 (0.001)	0.000 (0.001)	0.000 (0.001)	-0.019*** (0.005)	-0.024*** (0.007)	-0.018* (0.010)
On leave after 12 m.	0.001 (0.001)	0.001 (0.001)	0.001 (0.002)	-0.021*** (0.005)	-0.025*** (0.008)	-0.020** (0.010)
On leave after 24 m.	0.002 (0.001)	0.001 (0.002)	0.002 (0.002)	-0.018*** (0.005)	-0.022*** (0.008)	-0.018* (0.010)
Part-time emp. after 6 m.	-0.002 (0.005)	0.000 (0.008)	0.002 (0.010)	0.015** (0.007)	0.024** (0.011)	0.016 (0.014)
Part-time emp. after 12 m.	-0.002 (0.006)	-0.001 (0.008)	-0.009 (0.010)	0.010 (0.008)	0.020* (0.012)	0.021 (0.015)
Part-time emp. after 24 m.	-0.009 (0.005)	-0.008 (0.008)	-0.013 (0.010)	-0.002 (0.008)	0.011 (0.012)	0.012 (0.015)
Earnings after 6 m.	-42.09 (84.85)	-89.48 (121.71)	-20.64 (154.67)	219.98*** (68.34)	112.80 (99.56)	30.50 (127.46)
Earnings after 12 m.	23.64 (169.06)	-105.10 (242.69)	-78.77 (308.67)	551.33*** (138.18)	381.37* (200.52)	250.98 (256.68)
Earnings after 24 m.	-138.54 (184.35)	-10.07 (6.17)	40.38 (336.11)	380.17** (155.91)	389.89* (226.22)	495.92* (289.84)
N	7591	15,626	23,477	7665	15,899	23,853
Linear trend	N	Y	Y	N	Y	Y
Quadratic trend	N	N	Y	N	N	Y

图 5.15: 陪产假对劳动市场结果的影响

- **关键发现：** 陪产假增加了母亲产后就业的机会。

机制 2: 对父亲生育偏好的影响

Table 4
Effect of paternity leave on the time-use of fathers and mothers (DiD, ± 3 months).

Min. per day on:	Fathers				Mothers			
	OLS	Tobit	OLS	Tobit	OLS	Tobit	OLS	Tobit
Childcare	45.529 (28.283)	58.320* (31.468)	52.606 (32.769)	71.948** (36.168)	-13.080 (33.060)	-10.031*** (32.648)	-15.146 (40.640)	-13.190 (38.675)
Housework	-6.229 (28.838)	3.392 (34.730)	10.005 (34.470)	23.773 (40.413)	42.430 (27.528)	44.706 (27.368)	42.636 (37.361)	45.707 (36.517)
Work	29.290 (70.189)	39.975 (118.990)	-35.763 (78.922)	-104.885 (134.664)	25.624 (50.139)	54.328 (117.281)	13.452 (68.153)	-56.846 (158.584)
Residual	-69.095 (59.404)	-69.095 (56.345)	-27.825 (69.893)	-27.825 (65.419)	-54.940 (40.200)	-54.940 (38.286)	-45.489 (54.518)	-45.489 (50.815)
N	290	290	235	235	313	313	222	222
Age range	16-55	16-55	30-55	30-55	16-55	16-55	30-55	30-55

图 5.16: 陪产假对时间利用的影响

- **关键发现:** 陪产假增加了父亲的育儿时间, 减少了母亲的育儿时间。

Table 5
Changes in desired fertility, men vs. women.

	Basic spec.	LM controls	Full spec.	Poisson
Men*2011	-0.1995* (0.1134)	-0.2203* (0.1146)	-0.2214** (0.1131)	-0.1086** (0.0551)
Men	0.0552*** (0.0762)	0.0546 (0.0777)	0.1955* (0.1089)	0.0988* (0.0556)
N	871	871	868	868
Age polynomial	Y	Y	Y	Y
Educ. and emp. controls	N	Y	Y	Y
Married and n. children controls	N	N	Y	Y

图 5.17: 男性和女性理想生育数量的变化。

- **样本:** 2001, 2006, 2011 年
- **关键发现:** 陪产假降低了父亲理想中的生育数量。

机制 3: 对婚姻稳定性的影响

Appendix Table 8
Effect of paternity leave on separation and divorce.

	Divorced			Not cohabiting		
	± 3 months	± 6 months	± 9 months	± 3 months	± 6 months	± 9 months
2008	0.009 (0.007)	0.003 (0.009)	0.008 (0.011)	0.013 (0.009)	0.015 (0.014)	0.026 (0.017)
2009	0.004 (0.007)	0.017* (0.009)	0.024** (0.012)	-0.003 (0.010)	0.014 (0.014)	0.011 (0.017)
2010	-0.008 (0.006)	-0.025** (0.010)	-0.028** (0.013)	-0.022** (0.009)	-0.036*** (0.013)	-0.035** (0.017)
2011	-0.003 (0.007)	-0.014 (0.010)	-0.015 (0.013)	-0.010 (0.010)	-0.025* (0.014)	-0.029* (0.017)
2012	-0.000 (0.008)	0.004 (0.012)	0.014 (0.015)	-0.001 (0.011)	-0.002 (0.016)	0.003 (0.020)
2013	0.005 (0.008)	0.010 (0.012)	0.009 (0.015)	0.007 (0.011)	0.020 (0.016)	0.006 (0.020)

图 5.18: 陪产假对分居和离婚的影响。

- **关键发现:** 这一机制不显著。享受陪产假的家庭在 2010 年离婚率有所下降, 但其后影响趋于零, 意味着陪产假对婚姻稳定性影响很小。

第6章 税收归宿

内容提要

□ 税收归宿

□ 局部均衡

□ 税收弹性

□ 一般均衡

本章分为两个主要部分。局部均衡分析在单一市场中考察税收归宿，运用了例子、一般公式、弹性概念和实证研究。一般均衡分析则将范围扩大到多个相互关联的市场，运用哈伯格模型分析税收如何影响所有价格以及税负在劳动与资本之间的分配。

6.1 局部均衡

回顾财政学原理课程，我们学过纳税人与负税人并非同一概念。负税人是最终承担税负的单位或个人，而负税人不一定是税法规定的纳税人。由此，我们可以定义以下概念。

定义 6.1 (税收归宿)

最终承担税负、无法再转嫁的人，成为税负转嫁过程的终点。这个最终的税负承担者也称为税收归宿。

定义 6.2 (税负转嫁)

指纳税人将其缴纳的税款转由他人承担的经济过程。

- 税负转嫁的难易程度与供求价格弹性之间的关系

6.1.1 税收归宿

税收归宿：研究税收政策对各种价格及不同经济主体社会福利的影响。

- **法定归宿：**类似于纳税人
- **经济归宿：**类似于负税人

情形 6.1

如果对每包香烟征收 \$1 的消费税，会产生哪些影响？

- 它如何影响香烟的零售价格，进而影响吸烟者的行为？
- 它如何影响生产者利润和股东权益？
- 它如何影响烟草公司工人的收入？
- 它如何影响种植烟草的农民的收入？
- 税收归宿的重要性：它是政策评估的第一步。

6.1.2 局部均衡分析

- 分析单一市场
- 通常假设完全竞争市场，使用供给和需求曲线

例题 6.1 在一个完全竞争市场中，香烟的需求函数为 $Q = 4000 - 200P$ ，供给函数为 $Q = -500 + 100P$ 。如果对每包香烟征收 \$3 的从量税，则生产者每包承担的税负为 \$_____，消费者承担的税负为 \$_____。

解 税前均衡

$$Q = 4000 - 200P = -500 + 100P$$

$$P = 15, Q = 1000$$

假设对厂商征收每单位 \$3 的从量税

- 令 P 为消费者支付的价格，则厂商实际得到 $P - 3$

$$Q = 4000 - 200P = -500 + 100(P - 3)$$

$$P = 16, Q = 800$$

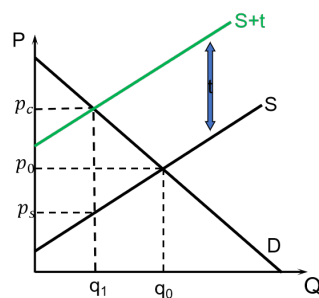
- 消费者总共支付 \$16，每包承担 \$1 的税负
- 厂商实际收到 \$13，每包承担 \$2 的税负

假设对消费者征收每单位 \$3 的从量税

- 令 P 为消费者支付的总成本（支付给厂商的价格 + 税），则厂商实际得到 $P - 3$ 。这与对厂商征税的情况相同。

经济直觉 1

税收归宿与向谁征税无关！



- 税前：均衡价格为 p_0 。
- 征收从量税 t 之后：
 - 消费者支付的价格为 p_c 。
 - 生产者收到的价格为 p_s 。
- 税负由生产者和消费者共同分担。

6.1.2.1 局部均衡的一般情形

需求函数：

$$Q = D(P)$$

供给函数：

$$Q = S(P)$$

- 对每单位商品征收 t 元的从量税
 - 均衡价格如何变化？
 - 税收归宿与什么相关？
- 解法：
 - 令 P 为消费者支付的总成本，则 $P - t$ 为厂商收到的价格。
 - 均衡时：

$$D(P) = S(P - t)$$

- 需要解出 $\frac{dP}{dt}$ 。

对 $D(P) = S(P - t)$ 进行全微分：

$$D'(P)dP = S'(P - t)(dP - dt)$$

解出 $\frac{dP}{dt}$ ：

$$\frac{dP}{dt} = \frac{S'(P - t)}{S'(P - t) - D'(P)}$$

由于 $S'(P - t) > 0$ 且 $D'(P) < 0$ ：

$$0 < \frac{dP}{dt} < 1$$

经济直觉 2

一般来说，税负由消费者和厂商共同分担。

引入价格弹性

- 需求价格弹性：

$$\varepsilon_D = -\frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -\frac{dD(P)}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = -D'(P) \frac{P}{Q}$$

- 供给价格弹性：

$$\varepsilon_S = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{dS(P)}{dP} \cdot \frac{P}{Q} = S'(P) \frac{P}{Q}$$

- 注意：均衡时， $Q = S = D$ 。

6.1.2.2 税收归宿与价格弹性的关系

$$\frac{dP}{dt} = \frac{S'(P - t)}{S'(P - t) - D'(P)} = \frac{S'(P - t) \frac{P-t}{S}}{S'(P - t) \frac{P-t}{S} - D'(P) \frac{P-t}{S} \frac{P-t}{P}}$$

当 t 趋近于 0 时， $\frac{P-t}{P}$ 趋近于 1。

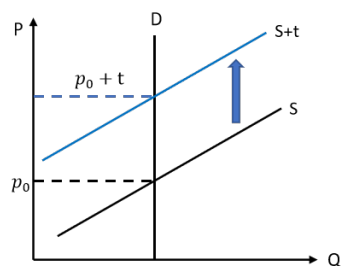
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_S + \varepsilon_D}$$

- 供给价格弹性 ε_S :
 - ε_S 越大 $\Rightarrow \frac{dP}{dt}$ 越大 $\Rightarrow$ 税后价格上涨越多 $\Rightarrow$ 消费者承担的税负越重。
 - 若供给完全弹性 ($\varepsilon_S = \infty$): $\frac{dP}{dt} = 1 \Rightarrow$ 税负完全由消费者承担。
 - 若供给完全无弹性 ($\varepsilon_S = 0$): $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow$ 税负完全由生产者承担。
- 需求价格弹性 ε_D :
 - ε_D 越大 $\Rightarrow \frac{dP}{dt}$ 越小 $\Rightarrow$ 税后价格上涨越少 $\Rightarrow$ 生产者承担的税负越重。
 - 若需求价格弹性为无穷大 ($\varepsilon_D = \infty$): $\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow$ 税负完全由生产者承担。
 - 若需求价格弹性为零 ($\varepsilon_D = 0$): $\frac{dP}{dt} = 1 \Rightarrow$ 税负完全由消费者承担。

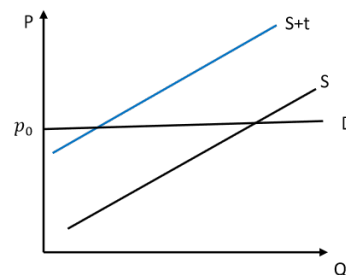
经济直觉 3

价格弹性较低的一方承担更重的税负

- 需求价格弹性大 $\Rightarrow$ 需求对价格敏感 $\Rightarrow$ 价格上涨导致需求量大幅下降 $\Rightarrow$ 税负难以转嫁 $\Rightarrow$ 税负更多地由生产者承担。

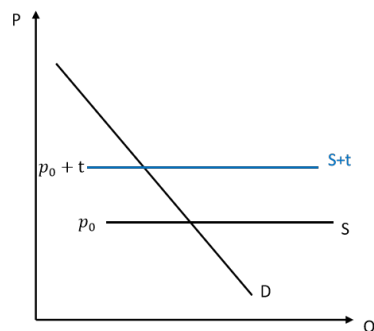


需求价格弹性为0,
税负完全由消费者承担

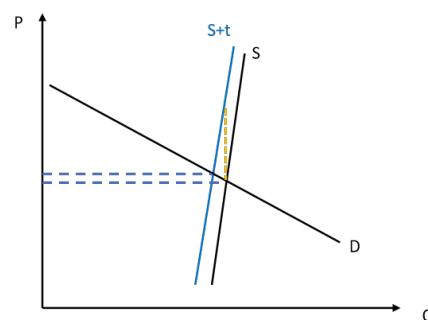


需求价格弹性无穷大,
税负完全由生产者承担

- 供给价格弹性小 $\Rightarrow$ 转产困难 $\Rightarrow$ 即使价格更低也必须出售 $\Rightarrow$ 税负难以转嫁 $\Rightarrow$ 生产者承担更多税负。



供给价格弹性无穷大,
税负完全由消费者承担



供给价格弹性非常小,
税负基本由生产者承担

6.1.3 税收归宿的实证研究: Doyle & Sampatharank (2008)

- 主题: 研究汽油销售税的税收归宿。
- 背景:
 - 2000 年春, 中西部汽油价格飙升, 甚至超过每加仑 \$2。

- 正值大选年，由于政治压力，州政府倾向于减税。
- 两个州暂停了 5% 的汽油销售税：
 - 印第安纳州 (IN)：7 月 1 日暂停，10 月 30 日恢复
 - 伊利诺伊州 (IL)：7 月 1 日暂停，12 月 31 日恢复

如何估计税收归宿

● 汽油销售税背景：

- 除销售税外，汽油还需缴纳消费税，即

$$\text{零售价} = \text{厂商收到的价格} + \text{销售税} + \text{消费税}$$

- IL 和 IN 允许从销售税税基中扣除全部或部分消费税。
- IL 汽油的销售税税基约为零售价的 90%；IN 约为 80%。
- 实证设计：
 - 若减税的好处完全传导给消费者，IL 的汽油零售价应下降 4.5% ($\frac{90 \times 5\%}{100}$)。
 - 若结果显示减税后 IL 汽油零售价下降了 2%，则意味着消费者享受了 44% ($2/4.5$) 的减税收益。
 - 类似地，若恢复销售税后 IL 汽油零售价上涨了 2%，则意味着消费者承担了 44% 的税负。
 - 因此，实证目标是估计减税（及恢复）后汽油零售价的变化。

如何估计汽油零售价的变化

● 单重差分法

- 将这两个州减税后的价格减去减税前的价格。
- $P_{IL,after} - P_{IL,before}$
- 价格变化不一定是减税导致的：国际油价变动、季节性变化等。

● 双重差分法

- 与邻州进行比较。
- 假设：若没有减税，两个州的油价变动趋势相同

$$y_{it} = \beta_0 + \beta_1 \text{Treat}_i * \text{Post}_t + \beta_2 \text{Treat}_i + \beta_3 \text{Post}_t$$

- Treat_i ：是否为处理组。 $\text{Treat}_{IL} = 1$, $\text{Treat}_{IA} = 0$
- Post_t ：是否为实验时间之后。 $\text{Post}_{June} = 0$, $\text{Post}_{July} = 1$
- $\text{Treat}_i * \text{Post}_t$ ：州 i 在时间 t 是否享受了减税。

	6 月	7 月
IA	β_0	$\beta_0 + \beta_3$
IL	$\beta_0 + \beta_2$	$\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$
差分	β_2	$\beta_1 + \beta_2$

本文的实证策略

$$\ln(\text{零售价}_{sbt}) = \beta_0 + \beta_1(\text{IL 或 IN})_s + \beta_2 \text{改革后}_t + \beta_3(\text{IL 或 IN})_s \times \text{改革后}_t + \beta_4 \ln(\text{批发价})_s + \beta_5 X_5 + \delta_b + \varepsilon_{sbt}$$

- 第一次回归：IL 和 IN 7 月 1 日减税的效果
 - (IL, IN) 对比 (邻州)
 - (6 月) 对比 (7 月)

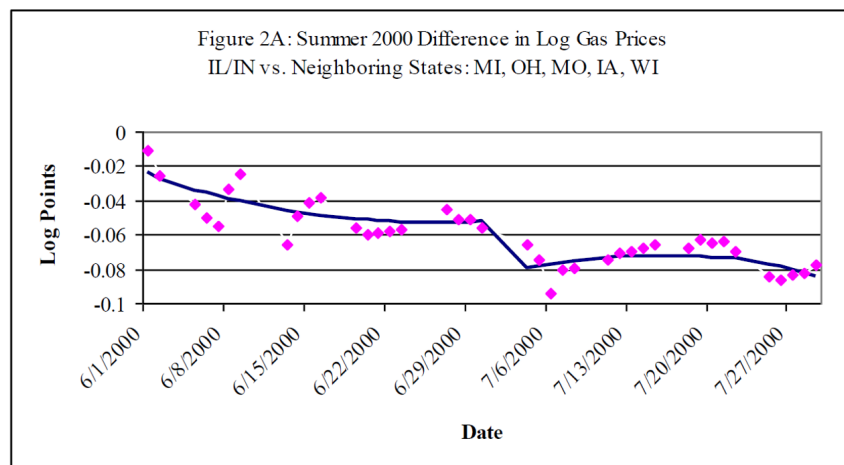


图 6.1: 油价趋势：减税

- 第二次回归：IN 10 月 30 日恢复征税的效果
 - (IN) 对比 (邻州)
 - (10 月) 对比 (11 月)

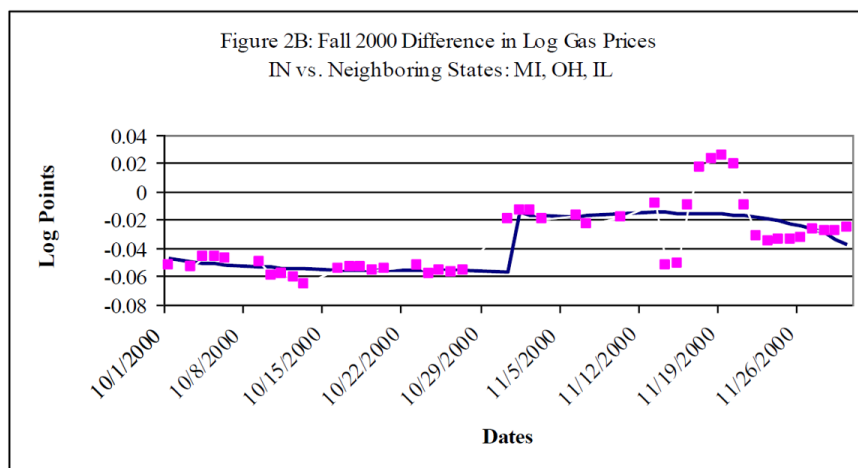


图 6.2: Enter Caption

- 第三次回归：IL 12 月 31 日恢复征税的效果
 - (IL) 对比 (邻州)
 - (12 月) 对比 (1 月)

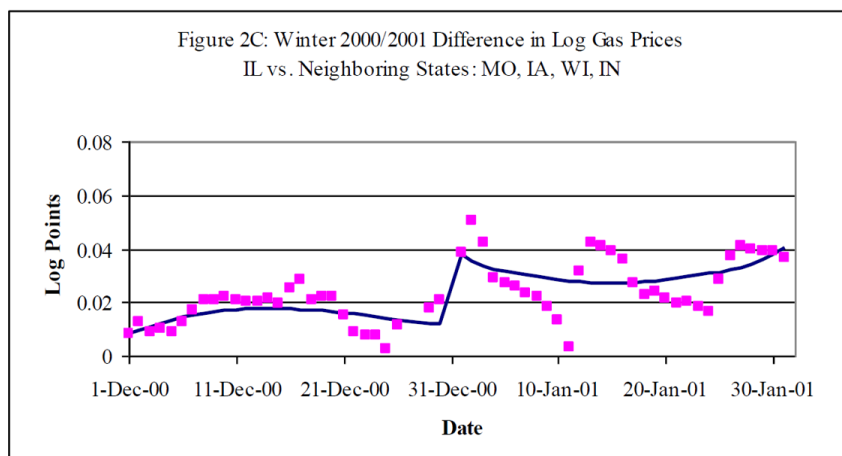


Table 2: Regression Results

A: July Tax Repeal

Dependent Variable:	Log(Retail Price)		
	(1)	(2)	(3)
Illinois or Indiana	-0.048 (0.038)	-0.013 (0.025)	-0.014 (0.021)
Post July 1	-0.052 (0.007)	0.029 (0.013)	0.025 (0.015)
(IL or IN)*Post July 1	-0.035 (0.007)	-0.029 (0.008)	-0.029 (0.008)
Observations	29675	29675	29433
R-Squared	0.23	0.60	0.64
Mean of Dep. Var.	0.560	0.560	0.560
Controls:			
Wholesale Price	No	Yes	Yes
ZIP Codes Characteristics & Brand	No	No	Yes

Panel A: Prices observed June 27, June 28, July 5, July 6;

Standard errors are reported, clustered at the state level.

图 6.3: 回归结果: 减税

约 70% 的减税利益由消费者享受。

$$\frac{2.9}{4.5} = 64.4\%, \quad \frac{2.9}{4} = 72.5\%$$

- 该回归主要使用了什么识别方法?
 - 双重差分法。
- 在表 2 面板 A 中, 各列之间的区别是什么?
 - 控制变量不同。从第 (1) 列到第 (3) 列, 依次加入了批发价、邮政编码特征和品牌作为控制变量。
- 以第 (3) 列的回归结果为例, 减税使汽油零售价下降了多少?
 - 2.9%

Table II: Regression Results			
B: October Tax Reinstatement		C: January Tax Reinstatement	
Dependent Variable:	Log(Retail Price)	Dependent Variable:	Log(Retail Price)
	(3)		(3)
Indiana	-0.053 (0.007)	Illinois	-0.005 (0.021)
Post Oct. 31	-0.009 (0.006)	Post Jan. 1	-0.020 (0.004)
IN*Post Oct. 31	0.040 (0.006)	IL*Post Jan. 1	0.037 (0.004)
Observations	21884	Observations	7071
R-Squared	0.26	R-Squared	0.39
Mean of Dep. Var.	0.456	Mean of Dep. Var.	0.303
Models include full controls. Standard errors are reported, clustered at the state level.			
Panel B: Prices observed Oct. 26, Oct. 27, Oct. 31, Nov. 1			
Panel C: Prices observed Dec. 29, Dec. 30, Jan. 2, Jan. 3.			

图 6.4: 回归结果: 增税

各州销售税归宿

印第安纳州 (IN): $\frac{4}{4} = 100\% \Rightarrow$ 税负全部由消费者承担。

伊利诺伊州 (IL): $\frac{3.7}{4.5} = 82.2\% \Rightarrow 82.2\%$ 的税负由消费者承担。

结论与评论

- 结论
 - 约 70% 的减税利益由消费者享受。
 - 80%-100% 的增税负担被转嫁给了消费者。
- 文章优点
 - 图表清晰，回归相对干净。
 - 同时考察了减税和增税的效果。

6.1.4 其他文献

- Hastings & Washington (2010)
 - 研究主题: 食品券的税收 (补贴) 归宿。
 - 研究背景: 内华达州的食物券在每月第一周发放。
 - 研究结论: 在食品券发放周, 食品需求增加 30%, 价格上涨 3%。
 - 食品券提供的部分补贴由生产者获得。
- Fabra & Reguant (2014)
 - 碳排放交易带来的发电成本上涨, 约 86% 通过更高的电价传导给了消费者。
- Suárez et.al (2016)
 - 州企业所得税的税收归宿: 约 40% 由所有者承担, 30-35% 由工人承担, 25-30% 由土地所有者承担。
- Hindriks & Serse (2019)
 - 烈酒消费税的税收归宿: 过度转嫁给消费者。
- 香烟消费税的税收归宿
 - 多数文献发现税负完全甚至过度转嫁给了消费者。

- **Harding et.al (2012)** : 约 80%-90% 传导给消费者。
- **周波与赵国昌 (2020)**
 - 研究内容: 车辆购置税减半征收, 谁受益?
 - 研究结论: 85% 由消费者获得。
- **汪昊等 (2022)**
 - 中国增值税的税收归宿 (一般均衡方法)
 - 39% 转嫁给劳动, 61% 转嫁给资本, 代表性消费者不承担。

6.2 一般均衡

在上一节, 我们学习了局部均衡分析。然而, 它存在一些局限性, 可能给研究带来挑战。

- 需求函数表示在其他条件不变的情况下, 一种商品的需求量对其自身价格变化的反应。
 - 然而, 税收通常不仅改变一种商品的价格, 还会改变其他商品的价格。
 - 例如, 增值税 (VAT) 影响众多商品。
 - 局部均衡分析适用于对特定商品征收的税。
 - 税收还可能直接导致消费者收入的变化。
 - 如果咖啡是一国的主要产业, 对咖啡征税将影响产业链上各种参与者的收入。
 - 局部均衡分析适用于市场规模相对较小的商品。
- 税收引起的价格变化会影响其他商品的需求。
 - 替代效应: 其他商品变得相对便宜, 需求增加。
 - 收入效应: 例如, 对食品征税使食品价格上涨, 导致食品支出增加, 减少了消费者用于其他产品的可支配收入, 从而影响其他商品的消费。从这个角度看, 局部均衡分析适用于支出份额较小的商品。
- 它无法解释税收归宿在生产要素之间的分配。

6.2.1 一般均衡分析

- 考虑多个商品市场。
- 不仅考察税负在生产者与消费者之间的归宿, 还考察其在生产要素之间的归宿。
- 同时分析消费行为和生产行为。

一个考虑生产的简单例子: 如果某省对可乐征税, 探讨其税收归宿。

- 如果可乐需求缺乏弹性, 消费者承担税负。
- 如果可乐需求完全弹性, 生产者承担税负。
 - 生产投入要素: 劳动、资本、土地等。
 - 短期内, 劳动相对有弹性 (可以转移到其他省份), 而资本和土地相对缺乏弹性。税负很可能由资本和土地承担。
 - 长期内, 资本也可以流动。税负很可能仅由土地承担。

经典一般均衡模型 (Harberger JPE 1962)

- 两种商品, 两种要素投入 (要素可在部门间自由流动)。
- 生产函数:

$$X = F(K_X, L_X)$$

$$Y = G(K_Y, L_Y)$$

- 一个代表性家庭，效用函数为：

$$U(X, Y)$$

- 要素禀赋约束：

$$K_X + K_Y = \bar{K}$$

$$L_X + L_Y = \bar{L}$$

- 注意：生产要素由代表性家庭拥有。

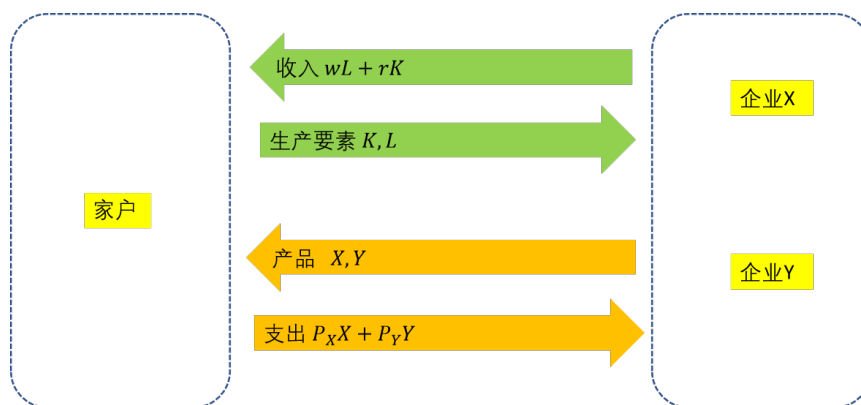


图 6.5: 一般均衡图示

6.2.2 对要素征税

在征税方式上有不同的选择。

- 对资本征税
 - 仅对用于生产 X 的资本征税
 - 仅对用于生产 Y 的资本征税
 - 对所有资本征税
- 对劳动征税
 - 仅对用于生产 X 的劳动征税
 - 仅对用于生产 Y 的劳动征税
 - 对所有劳动征税
- 对商品征税
 - 仅对 X 征税
 - 仅对 Y 征税
 - 对所有商品征税

以仅对 X 征税为例

- 消费端：对 X 征税，X 的价格（含税）上涨。
 - 替代效应：对 X 的需求下降，对 Y 的需求增加。
 - 收入效应：对 X 的需求下降，对 Y 的需求下降。
 - 对 X 的需求下降，对 Y 的需求不确定。
 - 如果 X 和 Y 是替代品，对 Y 的需求增加。这将导致 Y 的价格上涨，因此部分税负由 Y 的消费者承担。
- 生产端
 - X 的产量将减少，生产要素将从 X 部门流向 Y 部门。

- 假设 X 是劳动密集型（例如食品），Y 是资本密集型（例如工业制成品）。
- 大量劳动力从 X 部门流出，进入 Y 部门。但 Y 部门更需要资本。
- 因此，劳动的价格（工资）下降，资本的价格（租金率）相对上升。
- 工人受损，资本所有者相对获益。

假设 X 是劳动密集型（例如食品），Y 是资本密集型（例如工业制成品）。

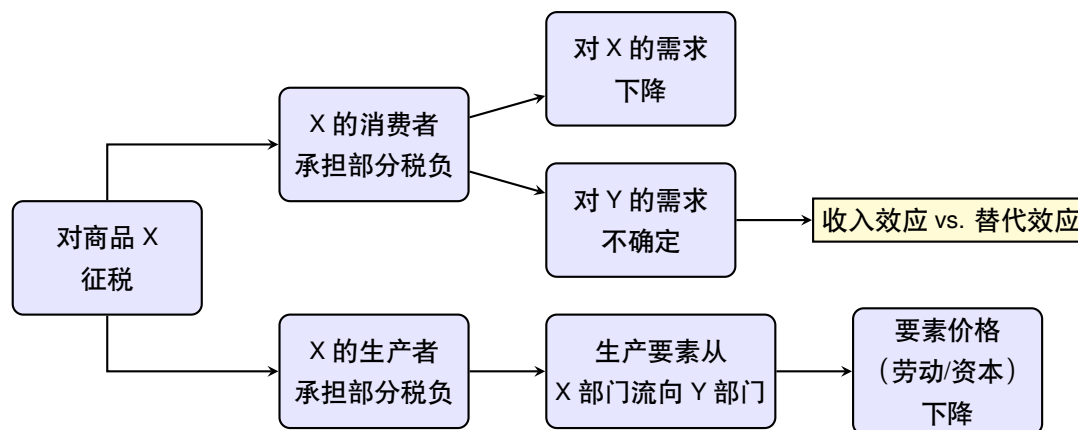


图 6.6: 税收归宿与要素流动

6.2.3 求解均衡

- 消费者效用最大化
 - 给定 $\{P_X, P_Y, w, r\}$ ，消费者最大化效用。
 - 在给定价格下，推导出对商品的需求 $\{X_D, Y_D\}$ 。
- 生产者利润最大化
 - 给定 $\{P_X, P_Y, w, r\}$ ，生产者最大化利润。
 - 在给定价格下，推导出商品的供给 $\{X_S, Y_S\}$ 以及对要素的需求 $\{K_X, L_X, K_Y, L_Y\}$ 。
- 市场均衡
 - 商品需求 = 商品供给，以求出商品价格。
 - 要素需求 = 要素供给，以求出要素价格。

6.2.3.1 效用最大化

- 效用函数: $U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta$
- 效用最大化:

$$\begin{aligned} \max & X^\alpha Y^\beta \\ \text{s.t.} & P_X X + P_Y Y = I \end{aligned}$$

- 解:

$$X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{I}{P_X}, \quad Y = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{I}{P_Y}$$

- 结论:

- 商品 X 的支出份额为 $\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ ，商品 Y 的支出份额为 $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ 。
- 两种商品之间的交叉价格弹性为零。

6.2.3.2 厂商利润最大化

- 给定产品和要素价格 $\{P, w, r\}$ ，选择最优的劳动和资本数量 $\{K, L\}$ 以最大化利润。

$$\max PF(K, L) - wL - rK$$

一阶条件：

$$(K) : PF_K(K, L) = r$$

$$(L) : PF_L(K, L) = w$$

因此：

$$\text{实际租金率} = \text{资本边际产出} : \frac{r}{P} = F_K(K, L) \equiv MPK$$

$$\text{实际工资} = \text{劳动边际产出} : \frac{w}{P} = F_L(K, L) \equiv MPL$$

6.2.3.3 厂商利润最大化

- 要素报酬

- 支付给所有工人的总“实际工资额”： $MPL \times L$

- 支付给所有资本所有者的总“实际资本收入”： $MPK \times K$

- 思考：

- 除了支付给劳动和资本所有者的报酬外，厂商还有额外的利润吗？

- 在完全竞争市场中，如果生产函数是规模报酬不变的，收入仅用于支付劳动和资本所有者。

定义 6.3 (规模报酬不变 (CRS) 生产函数)

如果所有要素增加 $\alpha\%$ ，产出也增加 $\alpha\%$ 。

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$$



- 对 λ 求导：

$$F_K(\lambda K, \lambda L)K + F_L(\lambda K, \lambda L)L = F(K, L)$$

- 令 $\lambda = 1$ ，则 $F_K(K, L)K + F_L(K, L)L = F(K, L)$

- 即： $F(K, L) = MPK \times K + MPL \times L$

- 现实中厂商为何有利润？

- 现实中，大多数厂商拥有而非租用其资本。

- 经济利润 = $Y - MPL \times L - MPK \times K$ (在 CRS 下等于 0)。

- 会计利润 = 经济利润 + $MPK \times K$ (不为零)。

- 经济学家保罗·道格拉斯注意到，国民收入在资本和劳动之间的分配在长期内大致保持不变。

- 他向数学家查尔斯·柯布提问：如果要素报酬等于其边际产出，什么样的生产函数能产生不变的要素份额？

- 如果生产函数满足 $F(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ ，那么：

- 它是规模报酬不变的。

- $MPK \times K = \alpha Y$ ， $MPL \times L = (1 - \alpha)Y$ 。

6.2.3.4 生产函数设定

- 生产函数: $X = AK^\alpha L^{1-\alpha}$
- 厂商利润最大化问题:

$$\max PAK^\alpha L^{1-\alpha} - rK - wL$$

- 一阶条件:

$$(K) : P\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = r \Rightarrow \alpha PX = rK$$

$$(L) : P(1-\alpha)AK^\alpha L^{-\alpha} = w \Rightarrow (1-\alpha)PX = wL$$

- 结论:

- 要素价格 = 产品价格 $\times$ 要素的边际产出。
- 劳动收入份额为 α , 资本收入份额为 $(1-\alpha)$ 。

6.2.4 一般均衡的具体函数形式

- 两种商品, 生产函数如下:

$$X = K_X^{\frac{1}{6}} L_X^{\frac{5}{6}}, \quad Y = K_Y^{\frac{5}{6}} L_Y^{\frac{1}{6}}$$

- 一个代表性家庭

- 禀赋: 拥有 1 单位劳动和 1 单位资本。
- 效用函数: $U(X, Y) = XY$

- 完全竞争市场, 初始无税。要素可以自由流动。

- 求:

- 均衡价格: P_X, P_Y, w, r
- 均衡数量和要素投入: X, Y, K_X, K_Y, L_X, L_Y

猜测均衡状态

- 两个部门的产出如何比较? X vs Y
- 两种商品的价格如何比较? P_X vs P_Y
- 哪种要素价格更高? w vs r
- 资本如何在两个部门之间分配? K_X vs K_Y
- 劳动如何在两个部门之间分配? L_X vs L_Y

消费者效用最大化

$$X_D = \frac{I}{2P_X}, \quad Y_D = \frac{I}{2P_Y} \quad (\text{其中 } I = w + r)$$

生产者利润最大化

$$X \text{ 利润最大化: } \frac{5}{6}P_X X_S = wL_X, \quad \frac{1}{6}P_X X_S = rK_X$$

$$Y \text{ 利润最大化: } \frac{1}{6}P_Y Y_S = wL_Y, \quad \frac{5}{6}P_Y Y_S = rK_Y$$

(思考: X 和 Y 哪个是劳动密集型?)

市场均衡

$$K_X + K_Y = 1, \quad L_X + L_Y = 1$$

$$X_D = X_S, \quad Y_D = Y_S$$

求解要素分配和产出 (X, Y, K_X, K_Y, L_X, L_Y)

- 由效用最大化: $P_X X = P_Y Y$ 。
- 结合 X 和 Y 的利润最大化条件:

$$\frac{5P_X X}{P_Y Y} = \frac{L_X}{L_Y} = 5, \quad \frac{P_X X}{5P_Y Y} = \frac{K_X}{K_Y} = \frac{1}{5}$$

- 结合市场均衡:

$$L_X = \frac{5}{6}, \quad L_Y = \frac{1}{6}, \quad K_X = \frac{1}{6}, \quad K_Y = \frac{5}{6}$$

$$X = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad Y = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$$

求解商品和要素价格

- 有四种商品, 但只有三个相对价格。我们可以通过设定劳动价格 $w = 1$ 来进行标准化。
- 由 X 的利润最大化:

$$5 = \frac{wL_X}{rK_X} \Rightarrow r = w = 1$$

$$\frac{5}{6}P_X X = wL_X \Rightarrow P_X = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

- 由 Y 的利润最大化:

$$\frac{1}{6}P_Y Y = wL_Y \Rightarrow P_Y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}}$$

思考一下

1. $I = w + r$ 是否成立?

$$I = 2P_X X = 2 \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}} = 2 = w + r$$

2. 为什么求解过程中没有使用 $I = w + r$?

- 如果使用了 $I = w + r$, 我们只需要四个市场均衡条件中的三个; 第四个市场会自动出清。
- 在实际求解过程中, 我们使用了四个均衡条件, 所以 $I = w + r$ 自动成立。
- $I = w + r$ 的含义: 总支出 = 总收入。

均衡状态

- 两个部门的产出如何比较? $X = Y$
- 两种商品的价格如何比较? $P_X = P_Y$
- 哪种要素价格更高? $w = r$
- 资本如何在两个部门之间分配? $K_X < K_Y$
- 劳动如何在两个部门之间分配? $L_X > L_Y$

6.2.5 税收归宿

- 假设对 Y 征收 50% 的从价税 (外税)。
- 关于财政支出的假设:
 - 可以假设所有税收收入转移回代表性家庭。

- 也可以假设政府与家庭的效用函数相同。在这种情况下，无论是政府还是私人部门，一半的收入用于购买 X，一半用于购买 Y。因此，整个社会的需求函数仍然是 $X_D = \frac{I}{2P_X}$ 和 $Y_D = \frac{I}{2P_Y}$ 。
- 探讨税收归宿：
 - 征税后，价格如何变化： P_X, P_Y, w, r ?
 - 征税后，工人和资本所有者的效用如何变化？
 - 假设有两个代表性家庭，一个拥有 1 单位劳动，另一个拥有 1 单位资本。
 - 在效用函数 $U = XY$ 下，需求函数不会改变；社会总收入仍有一半用于 X，一半用于 Y。
 - 但我们可以分别计算工人和资本所有者的效用。

假设

- 对 Y 征收 50% 的从价税。
- 令 P_Y 为厂商收到的价格，则消费者支付的价格为 $\frac{3}{2}P_Y$ 。
- 所有税收收入转移给代表性家庭。
- 消费者效用最大化（与税前不同）

$$X_D = \frac{I}{2P_X}, \quad Y_D = \frac{I}{3P_Y} \quad (\text{其中 } I = w + r + \frac{1}{2}P_Y Y)$$

- 生产者利润最大化（与税前相同）

$$X \text{ 利润最大化: } \frac{5}{6}P_X X_S = wL_X, \quad \frac{1}{6}P_X X_S = rK_X$$

$$Y \text{ 利润最大化: } \frac{1}{6}P_Y Y_S = wL_Y, \quad \frac{5}{6}P_Y Y_S = rK_Y$$

- 市场均衡（与税前相同）

$$K_X + K_Y = 1, \quad L_X + L_Y = 1$$

$$X_D = X_S, \quad Y_D = Y_S$$

求解要素分配和产出 (X, Y, K_X, K_Y, L_X, L_Y)

- 由效用最大化： $2P_X X = 3P_Y Y$ 。
- 由 X 和 Y 的利润最大化条件：

$$\frac{5P_X X}{P_Y Y} = \frac{L_X}{L_Y}, \quad \frac{P_X X}{5P_Y Y} = \frac{K_X}{K_Y}$$

- 结合市场均衡：

$$L_X = \frac{15}{17}, \quad L_Y = \frac{2}{17}, \quad K_X = \frac{3}{13}, \quad K_Y = \frac{10}{13}$$

$$X = \left(\frac{3}{13}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{15}{17}\right)^{\frac{5}{6}}, \quad Y = \left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{17}\right)^{\frac{5}{6}}$$

求解商品和要素价格

- 有四种商品，但只有三个相对价格。我们可以通过设定劳动价格来进行标准化，即令 $w = 1$ 。
- 由 X 的利润最大化问题：

$$5 = \frac{wL_X}{rK_X} \implies r = \frac{13}{17}$$

- 由 X 的利润最大化问题：

$$\frac{5}{6}P_X X = wL_X \implies P_X = \frac{6}{5} \left(\frac{65}{17}\right)^{\frac{1}{6}}$$

- 由 Y 的利润最大化问题：

$$\frac{1}{6}P_Y Y_S = wL_Y \Rightarrow P_Y = 6 \left(\frac{13}{85} \right)^{\frac{5}{6}}$$

- 检验 $I = w + r + \frac{1}{2}P_Y Y$ 是否成立。

$$w + r + \frac{1}{2}P_Y Y = 1 + \frac{13}{17} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{17} = \frac{36}{17}$$

$$X_D = \frac{I}{2P_X} \Rightarrow I = 2P_X X = 2 \times \frac{6}{5} wL_X = \frac{36}{17}$$

- 如果税收收入没有转移给代表性家庭，求解过程的哪个部分会改变？

- 消费者效用最大化中的收入 I 将不包括转移支付 $\frac{1}{2}P_Y Y$ 。需求函数仍为 $X_D = I/(2P_X)$ 和 $Y_D = I/(2P_Y)$ ，但 $I = w + r$ 。这将改变均衡条件和最终解。

6.2.5.1 探讨税收归宿：价格变化

	征税前	征税后	比较	直觉解释
w	1	1	不能说明征税前后劳动力价格不变	
r	1	$\frac{13}{17}$	征税后，（相对劳动力）资本更便宜了	对Y（资本密集型）征税，生产要素从Y流入到X（劳动密集型），而生产X不需要那么多资本，因此资本更便宜了
P_X	$\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}} \approx 1.57$	$\frac{6}{5} \left(\frac{65}{17}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1.50$	征税后，X更便宜了	由于X的需求对Y的交叉价格弹性为0，征税引起的Y的价格变动不会对X商品的需求产生影响。但更多要素流入到X部门，X的供给增加，因此X的价格下降。
P_Y	$\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{5}{6}\right)^{-\frac{5}{6}} \approx 1.57$	$6 \left(\frac{13}{85}\right)^{\frac{5}{6}} \approx 1.25$	1.25 < 1.57，Y厂商得到的价格下降。 1.25 * 1.5 = 1.857 > 1.57，消费者要支付的Y的价格上升。	税收归宿由生产者和消费者共同承担，因此消费者支付的价格上升，厂商得到的价格下降。

图 6.7: 征税前后对比

6.2.5.2 探讨税收归宿：效用变化

$$X_D = \frac{I}{2P_X^c}, \quad Y_D = \frac{I}{2P_Y^c}, \quad U = \frac{I^2}{4P_X^c P_Y^c}$$

	税前	税后
P_X^c	1.57	1.50
P_Y^c	1.57	1.88
I	$w + r = 2$	$w + r + \frac{1}{2}P_Y^c Y = 2.12$
U	0.41	0.40

征税后效用下降。为什么？
福利经济学第一定理！

6.2.5.3 探讨税收归宿：工人和资本所有者的效用

假设一个代表性家庭拥有 1 单位劳动，另一个代表性家庭拥有 1 单位资本。税收收入平均转移给两个家庭。

• 工人：

- 收入变化：劳动收入仍为 1，但有政府转移支付，因此收入（以劳动为计价物）增加。
- 商品价格变化：X 更便宜，Y 更贵。
- 由于 X 价格变化小，Y 价格变化大，总体价格水平上升。
- 效用变化不确定。

• 资本所有者：

- 收入变化：征税后，资本收入下降，但有政府转移支付。（直观上，部分政府税收收入也转移给了工人，因此转移支付的增加小于资本收入的减少。）
- 商品价格变化：X 更便宜，Y 更贵，总体价格水平上升。
- 资本所有者的效用很可能下降。

	税前	税后
价格		
P_X	1.57	1.50
P_Y	1.57	1.88
收入		
劳动	$I = 1$	$I = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_Y Y \right) = 1.18$
资本	$I = 1$	$I = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} P_Y Y \right) = 0.94$
效用		
劳动	0.101	0.123
资本	0.101	0.078
效用之和	0.202	0.201

工人效用增加，资本所有者效用下降。总效用下降。

第7章 最优税收

内容提要

- 超额负担
- 等价变化
- 补偿变化

- 税收效率
- Ramsey 最优商品税
- 逆弹性法则

政府应如何设计税收，才能在筹集收入的同时，将经济无效率降到最低？本章探讨最优税收的核心原则，首先从衡量税收造成的效率损失开始。我们引入无谓损失作为衡量无效率的关键指标，并讨论如何运用等价性变化与补偿性变化来量化税收的超额负担。

本章探讨的核心问题是：税收应如何设计，以将效率损失降到最低？在 Ramsey (1927) 的开创性工作基础上，我们考察最小化无谓损失的税收规则，并运用等价性变化方法来度量超额负担。这一框架为理解税收政策中的权衡取舍以及设计有效率的税制提供了理论基础。

7.1 税收的超额负担

回顾《财政学原理》课程的内容，

- 超额负担的定义：在政府征收的税收收入之外，额外加诸于纳税人的福利损失。
- 如果一项税收不产生替代效应，则没有超额负担；这样的税收被称为中性的税收。
- 一次总付税（人头税）是中性的，因为它不会扭曲相对价格或行为。
 - 然而，由于其累退性质，一次总付税通常被认为是公平的。

如何衡量超额负担？主要有两种方法：

- 社会福利方法：运用马歇尔消费者剩余和生产者剩余。
- 等价性变化与补偿性变化：希克斯福利变化度量方法。

7.1.1 衡量超额负担的社会福利方法

7.1.1.1 模型设定

- 两种商品：
 - x ：被征税商品
 - y ：未被征税商品（计价物）
- 消费者：拟线性效用 $u(x) + y$
- 生产者：生产 x 的成本为 $c(x)$
- 价格：
 - y 是计价物（价格 = 1）
 - 消费者的购买价格 x ： p
 - 每单位 x 的税额： t
- 其他符号：
 - 消费者收入： Z
 - 税收收入： $R = t \cdot x$

• η_S, η_D : 商品 x 的供给弹性和需求弹性 (取绝对值)

$$\eta_S = \frac{\partial x_S}{\partial P} \cdot \frac{P}{x_S}, \quad \eta_D = -\frac{\partial x_D}{\partial P} \cdot \frac{P}{x_D}$$

推导需求曲线

消费者在预算约束下最大化效用:

$$\max_{x,y} u(x) + y \quad \text{s.t.} \quad px + y = Z$$

将约束代入目标函数:

$$\max_x u(x) + Z - px$$

一阶条件:

$$p = u'(x)$$

商品 x 的需求曲线由**边际效用**函数给出:

$$p = u'(x)$$

推导供给曲线

生产者最大化利润:

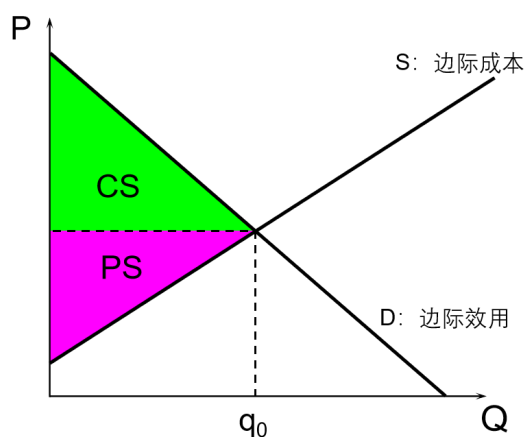
$$\max_x px - c(x)$$

一阶条件:

$$p = c'(x)$$

商品 x 的供给曲线由**边际成本**函数给出:

$$p = c'(x)$$



征税前社会福利:
消费者剩余: CS
生产者剩余: PS
社会福利: CS+PS

图 7.1: 市场均衡

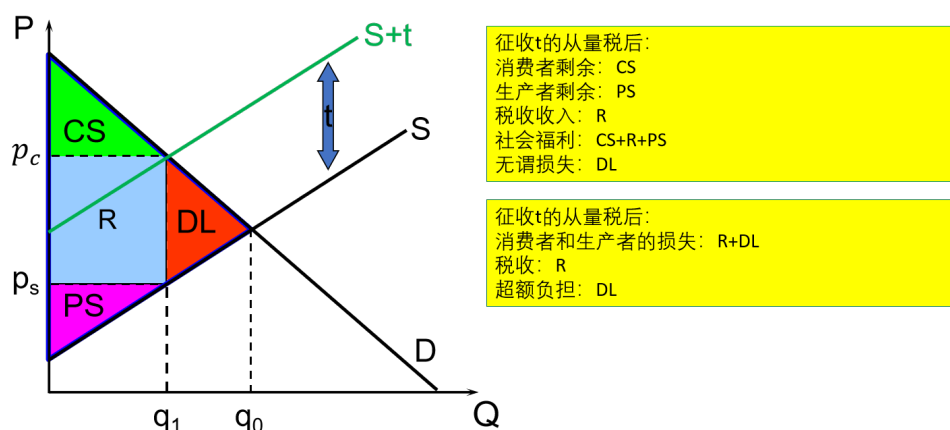


图 7.2: 征税后的市场均衡——无谓损失

如何衡量无谓损失

从无税的初始状态出发，引入一个很小的税收 $d\tau$ ：

$$DL = \frac{1}{2} |dQ| d\tau$$

利用需求弹性的定义 $\eta_D = -\frac{\partial D}{\partial P} \frac{P}{Q}$ ：

$$|dQ| = \eta_D dP \frac{Q}{P}$$

由局部均衡的税收归宿分析可知：

$$dP = \frac{\eta_S}{\eta_S + \eta_D} d\tau$$

代入：

$$DL = \frac{1}{2} \frac{\eta_D \eta_S}{\eta_S + \eta_D} Q (d\tau)^2$$

- 无谓损失随**税率的平方** $(d\tau)^2$ 而增加。
 - 启示：将税收广泛分散于多种商品，以保持各商品的税率处于低位。
- 无谓损失**随着需求弹性 η_D 和供给弹性 η_S 的增加而增加。**

$$DL = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{\eta_S} + \frac{1}{\eta_D}} \frac{Q}{P} (dt)^2$$

- **政策启示：**对**弹性较低**的商品（例如食品、药品）课以更重的税，以最小化无谓损失。
- **问题：**这种方法**不公平**（具有累退性），因为低收入家庭在必需品上的支出占其收入的比例更大。

现在，我们通过等价性变化和补偿性变化来衡量超额负担。在此之前，我们先给出超额负担的定义和一个现实例子。

定义 7.1 (超额负担)

超额负担是在政府征收的税收收入**之外**，额外加诸于纳税人的福利损失。

$$\text{超额负担} = \text{纳税人的总负担} - \text{税收收入}$$



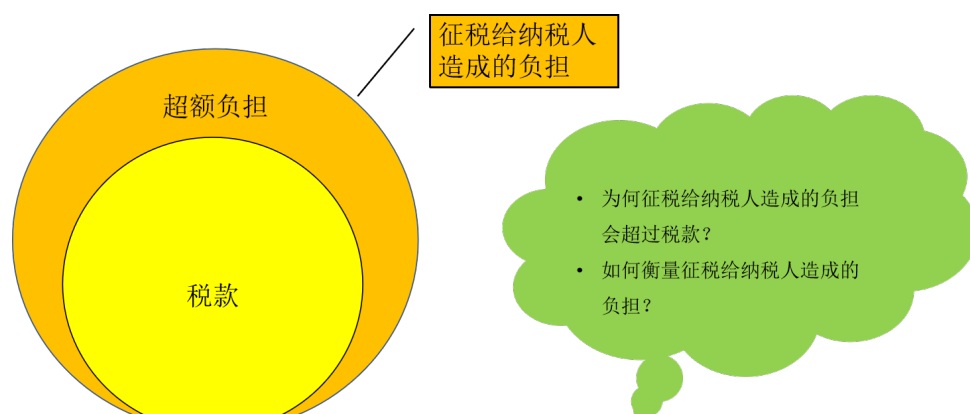


图 7.3: 超额负担的直观展示

在深入探讨超额负担的数学推导之前，先看两个来自真实世界的故事，它们生动地说明了税收如何扭曲行为并造成无效率。这些历史案例——一个来自英国，一个来自荷兰——表明，税收的无谓损失不只是一个理论概念，更有一股塑造了建筑风格、公共卫生和日常生活长达数百年的力量。

威廉三世国王的窗户税（1696 年）

1696 年，英王威廉三世为增加收入，在英格兰开征了窗户税。此税基于住宅的窗户数量征收——窗户越多，税额越高。为规避此税，许多房主将窗户砌死，导致房屋阴暗、通风不良。这种行为反应造成了典型的无谓损失：人们改变自己的住房选择，并非因为喜欢更少的窗户，而纯粹是为了避税。该税扭曲了行为，降低了福利，最终于 1851 年因公共卫生问题被废除。时至今日，它仍是有力的历史例证，说明了税收如何造成意想不到的效率损失。

Window tax in England (1696-1851)



荷兰门宽的故事

在 17 世纪的阿姆斯特丹，政府根据门的尺寸对房屋征税——门越宽，税越高。为最小化税负，居民们修建了极窄的门，同时将窗户做得很大。这种创造性的规避方法留下了一份持久的建筑遗产：直至今日，阿姆斯特丹运河边的房屋仍有着不成比例的小门，你还能看到山墙上用来从窗户吊运家具的钩子。与英国的窗户税一样，这项政策产生了无谓损失——人们忍受着不便（狭窄的入口、复杂的搬家过程），而政府却几乎收不到什么税，因为人人都通过把门改窄来适应。

Tax on the width of house in Holland



7.1.2 等价性变化 (EV) 与补偿性变化 (CV)

7.1.2.1 对先前问题的解答

- 为什么税收给纳税人造成的负担会超过征收的税收收入？
 - 税收扭曲了相对价格，导致**替代效应**，降低了经济效率。
 - 除了将购买力转移给政府（收入效应）之外，税收还使消费者和生产者改变了行为（替代效应），从而产生了**超额负担**（无谓损失）。
- 我们如何衡量一项税收造成的总负担？
 - 等价性变化 (EV)**：在税前价格下，需要从消费者那里拿走、以使其效用降低幅度与征税后相同的货币量。
 - 补偿性变化 (CV)**：在征税后，需要补偿给消费者、以使其恢复到原来效用水平的货币量。

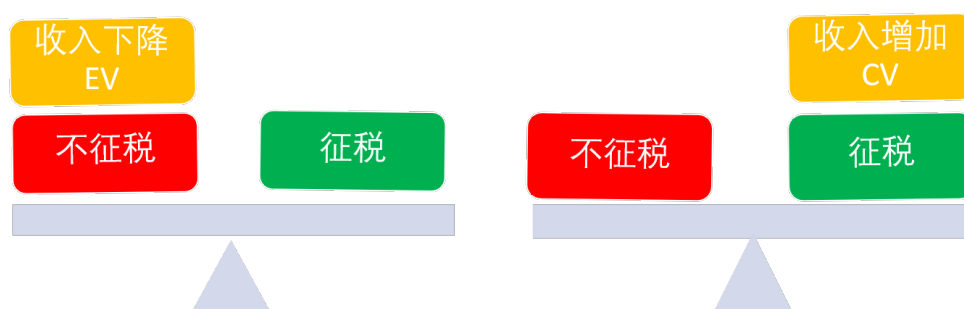


图 7.4: 等价性变化与补偿性变化

小结

- 一项税收的总负担包括：
 - 税收收入**：从消费者向政府的转移
 - 超额负担**：由扭曲选择造成的无谓损失
- EV 和 CV 是衡量税收造成的总福利损失的两种货币度量指标。
- 总负担与税收收入之差即为超额负担。

7.1.2.2 衡量超额负担：模型设定

- 两种商品：X 和 Y
- 对每单位 X 征收从量税 t
- 假设供给完全弹性（供给弹性无穷大），因此税负全部由消费者承担

消费者更偏好哪种税收方式？

根据超额负担的概念，在前面的例子中，消费者更偏好哪种税收方式？

- 选项 A：对每单位 X 征收从量税 t
- 选项 B：征收一次总付税 $t \cdot Q_x^B$ （直接收取等额收入）

表 7.1: 征税前后对比

征税前	
价格	(P_x, P_y)
消费束	点 A: (Q_x^A, Q_y^A)
征税后	
价格	$(P_x + t, P_y)$
消费束	点 B: (Q_x^B, Q_y^B)
税收收入	$t \cdot Q_x^B$

回顾《财政学》的内容

- 如果一项税收不产生替代效应，则**没有超额负担**；这样的税收被称为**中性的**税收。
- **一次总付税**是中性的，因为它不会扭曲相对价格或行为。
- 相比之下，对 X 征收从量税会改变相对价格 $\frac{P_x+t}{P_y}$ ，诱导消费者用其他商品替代 X（在例子中从 10 单位降至 1 单位），从而产生**超额负担**。
- 一项从量税相当于一个数额为 EV （等价性变化）的一次总付税。
- **超额负担的定义**： $EV > t \cdot Q_x^B$
- 因此，从量税比一次总付税（等额税收收入为 $t \cdot Q_x^B$ ）**更差**。

示例：可口可乐 vs. 百事可乐 mybigthm

表 7.2: 征税前后的消费选择

	征税前		征税后	
	价格	数量	价格	数量
可口可乐	3	10	6	1
百事可乐	3	10	3	18

- **税收收入**： $t \times Q_x^B = 3 \times 1 = 3$
- 我们如何衡量这项税收造成的负担？

7.1.2.3 衡量超额负担：图形解法

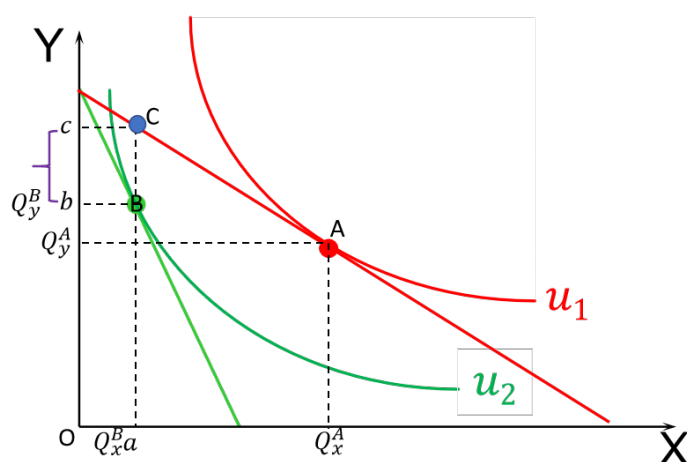


图 7.5: 税收收入

- 点 B 处的预算约束:

$$Oa \cdot P_x + Ob \cdot P_y + T = I$$

消费者可以购买 Oa 单位的 X 和 Ob 单位的 Y 。

- 点 C 处的预算约束:

$$Oa \cdot P_x + Oc \cdot P_y = I$$

消费者可以购买 Oa 单位的 X 和 Oc 单位的 Y 。

- 税收收入:

$$T = bc \cdot P_y$$

其中 $bc = Ob - Oc$ 代表因税收而减少的 Y 消费量。

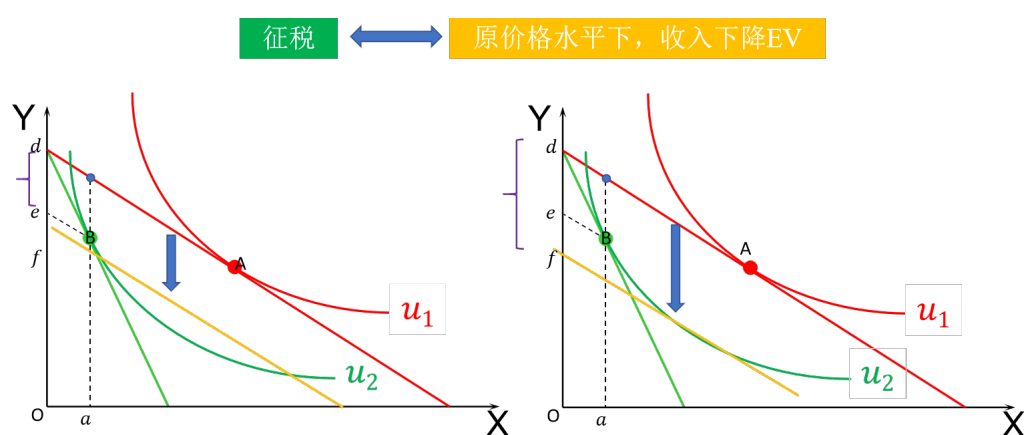


图 7.6: 等价性变化衡量超额负担: EV

- 在点 d 处:

$$Od \cdot P_y = I$$

消费者可以用全部收入 I ，按税前价格购买 Od 单位的 Y 。

- 在点 f 处：

$$Of \cdot P_y = I - EV$$

在税前价格下，被拿走 EV （等价性变化）后，消费者可以购买 Of 单位的 Y 。

- 税收造成的负担（等价性变化）：

$$EV = df \cdot P_y$$

其中 $df = Od - Of$ 代表与税收带来的福利损失等价的 Y 消费减少量。

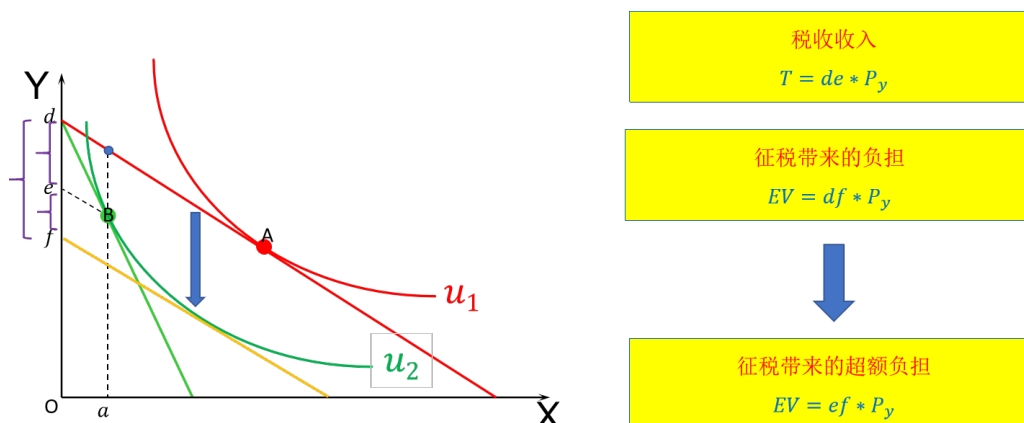


图 7.7: 等价性变化衡量超额负担：超额负担

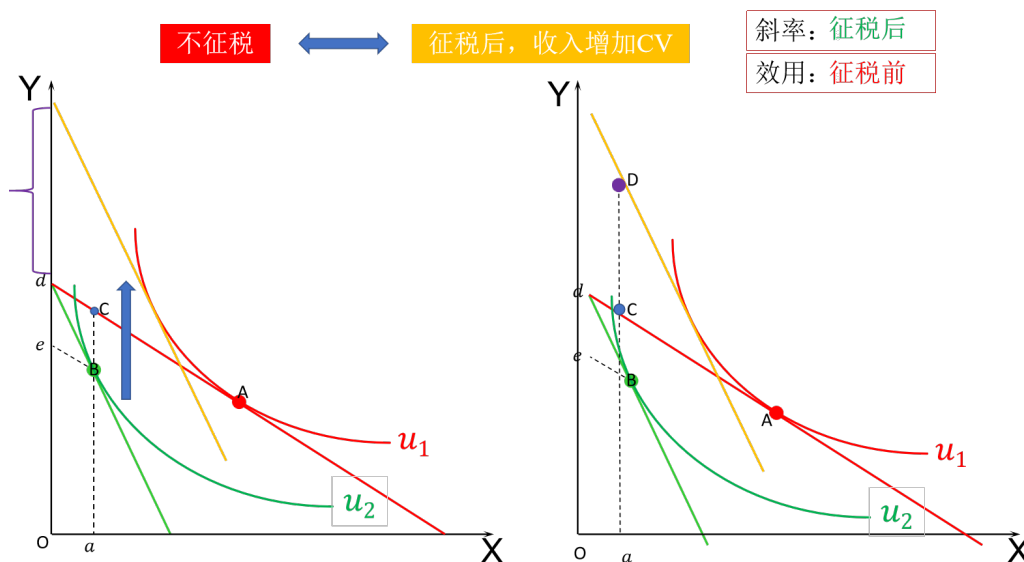


图 7.8: 补偿性变化衡量超额负担：CV

- 在点 B 处：

$$Oa \cdot (P_x + t) + aB \cdot P_y = I$$

消费者可以按税后价格购买 Oa 单位的 X 和 aB 单位的 Y 。

- 在点 D 处：

$$Oa \cdot (P_x + t) + aD \cdot P_y = I + CV$$

在收到 CV （补偿性变化）以恢复原有效用水平后，消费者可以按税后价格购买 Oa 单位的 X 和 aD 单位的 Y 。

- 税收带来的负担（补偿性变化）：

$$CV = BD \cdot P_y$$

其中 $BD = aD - aB$ 代表，在税后价格下，为补偿消费者因税收造成的损失所需增加的 Y 消费量。

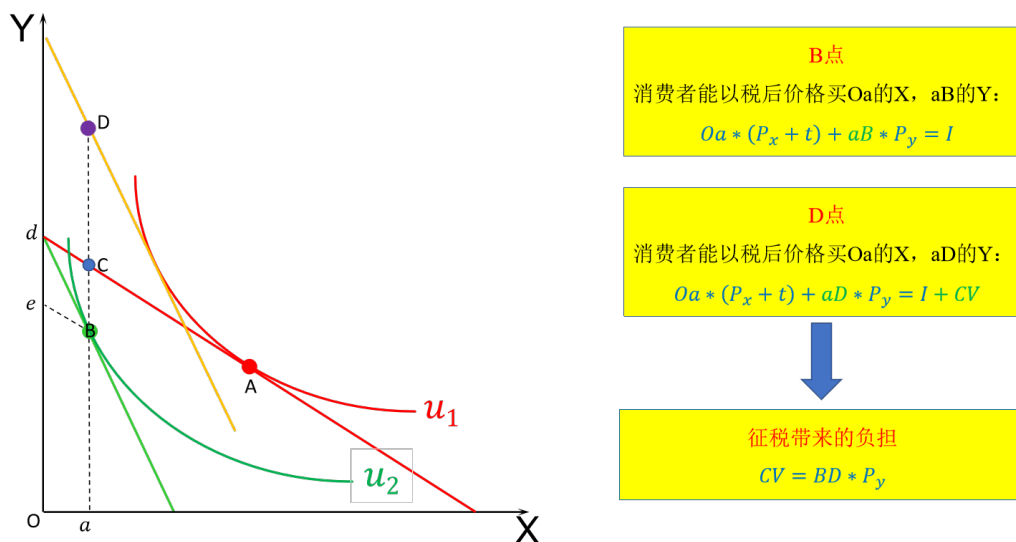


图 7.9: 补偿性变化衡量超额负担：超额负担

情形：如果相对价格保持不变

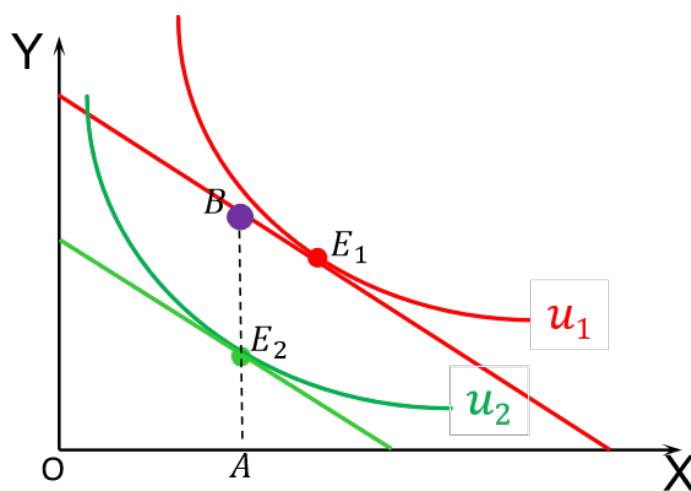


图 7.10: 相对价格不变

- 假设：征税前后相对价格保持不变。
- 税前价格： P_x, P_y
- 税后价格： $P_x + t_x, P_y + t_y$
- 相对价格不变的条件：

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{P_x + t_x}{P_y + t_y}$$



在初始价格下，收入减少了 EV ：

$$P_x x + P_y y = I - EV$$

收入减少后，预算线经过点 E_2 ：

$$P_x \cdot OA + P_y \cdot AE_2 = I - EV$$

由点 E_2 处的税后预算约束：

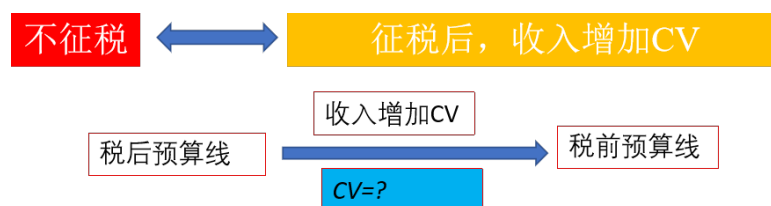
$$P_x \cdot OA + P_y \cdot AE_2 + T = I$$

因此：

$$EV = T$$

注意

当相对价格保持不变时，用等价性变化衡量的超额负担为**零**。



征税后，收入按税后价格增加了 CV ：

$$(P_x + t_x)x + (P_y + t_y)y = I + CV$$

收入增加后，预算线经过点 B ：

$$(P_x + t_x) \cdot OA + (P_y + t_y) \cdot AB = I + CV$$

由点 E_1 处的税前预算约束：

$$P_x \cdot OA + P_y \cdot AB = I$$

补偿性变化可表示为：

$$CV = t_x \cdot OA + t_y \cdot AB = T + t_y \cdot BE_2$$

注意

当相对价格保持不变时，用补偿性变化衡量的超额负担为 $t_y \cdot BE_2$ 。

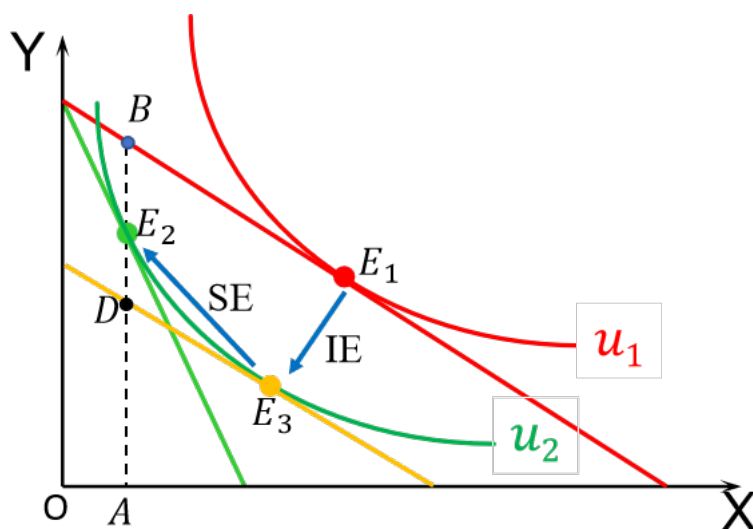


图 7.11: 超额负担与替代效应

当没有替代效应时

- 如果**没有替代效应**:
 - 点 E_2 和 E_3 **重合** (补偿需求束和最终需求束相同)。
 - 点 D 和 E_2 **重合**。
 - **超额负担为零**——该税收只产生收入效应, 没有扭曲。
 - 当相对价格保持不变 (均一税) 或需求完全无弹性时, 就会出现这种情况。
 - **超额负担是由替代效应造成的**。
- 超额负担方法可能会**高估**税收造成的福利损失, 因为:
 - 它只考虑了**税收收入**这一面, 而忽略了:
 - 税收的**再分配效应** (公平考量)
 - 由税收收入资助的**公共品收益**
 - 一个完整的福利分析, 必须在无谓损失和政府支出的社会价值之间进行权衡。
 - 三种度量方法之间的关系
 - **等价性变化 (EV)**、**补偿性变化 (CV)** 与 **马歇尔消费者剩余**之间的关联超出了本课程的范围。
 - 感兴趣的同学可以查阅关于福利度量的文献 (例如, Hicks, 1943; Willig, 1976)。

7.1.3 超额负担的另一种视角: 回顾福利定理

个体理性

- 消费者效用最大化:

$$MRS_{XY} = \frac{P_X}{P_Y}$$

- 生产者利润最大化:

$$\frac{P_X}{P_Y} = MRT_{XY}$$

集体理性

- 帕累托最优要求：

$$MRS_{XY} = MRT_{XY}$$

对商品 X 征税的福利影响

当对商品 X 征收从量税 t 时：

- 消费者最大化效用：

$$MRS_{XY} = \frac{P_X(1+t)}{P_Y}$$

- 生产者最大化利润：

$$\frac{P_X}{P_Y} = MRT_{XY}$$

- 因此：

$$MRS_{XY} \neq MRT_{XY}$$

- 由此产生的配置不是帕累托最优的。

关键洞见

税收在边际替代率（消费者）和边际转换率（生产者）之间打入了一个楔子，从而造成了**超额负担**（无谓损失）。经济不再满足帕累托最优条件 $MRS = MRT$ 。

7.2 最优税收

7.2.1 基本概念

- 从效率角度看，**一次总付税**是最优的，因为它不产生替代效应或超额负担。
- 然而，一次总付税是**不公平的**。从公平角度看，能力更高的个人应缴纳更高的一次总付税。
- 但**能力是不可观测的**。因此，在实践中，政府必须对可观测的结果（如收入或消费）征税。
- 对结果征税会扭曲（商品或要素的）价格，并造成**效率损失**。
- 最优税收的两个主要框架：
 - Ramsey 框架**：线性税 $t \times x$
 - Mirrleesian 框架**：非线性税 $t(x)$

7.2.2 Ramsey 最优税收：模型设定

- 政府征税以实现两个目标：
 - 筹集一笔固定数额的收入 E
 - 最小化代表性消费者的效用损失
- 一次总付税不可用。
- N 种商品**：生产者价格固定且标准化为 1。
 - 商品 i 的生产者价格： $p_i = 1$
 - 商品 i 的消费者价格： $q_i = 1 + \tau_i$
- 一个代表性消费者**
- 代表性家庭最大化：

$$\max_{x_1, \dots, x_n, l} U(x_1, x_2, \dots, x_n, l)$$

受预算约束：

$$q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n \leq wl + Z$$

其中：

- Z ：非劳动收入
- w ：工资率
- 劳动收入不征税（如果劳动可以被征税，则等同于对所有商品统一征税）

拉格朗日函数为：

$$L = U(x_1, x_2, \dots, x_n, l) + \alpha(wl + Z - q_1 x_1 - \dots - q_n x_n)$$

一阶条件：

$$MU_i = \alpha q_i, \quad MU_l = -\alpha w$$

最优选择 $x_i(q, Z), l(q, Z)$ 以及间接效用函数 $V(q, Z)$ 满足：

$$\frac{\partial V(q, Z)}{\partial Z} = \alpha, \quad \frac{\partial V(q, Z)}{\partial q_i} = -\alpha x_i$$

包络定理的证明

$$\frac{\partial V(q, Z)}{\partial Z} = \frac{\partial L}{\partial Z} = \sum_{i=1}^n (MU_i - \alpha q_i) \frac{\partial x_i}{\partial Z} + (MU_l - \alpha w) \frac{\partial l}{\partial Z} + \alpha = \alpha$$

$$\frac{\partial V(q, Z)}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n (MU_j - \alpha q_j) \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + (MU_l - \alpha w) \frac{\partial l}{\partial q_i} - \alpha x_i = -\alpha x_i$$

α 代表收入的边际效用（对个人而言，货币的边际价值），也称为影子价格。

罗伊恒等式：

$$x_i = - \frac{\frac{\partial V(q, Z)}{\partial q_i}}{\frac{\partial V(q, Z)}{\partial Z}}$$

政府的问题

政府选择消费者价格 $q_1, q_2, \dots, q_n$ ，在筹集收入 E 的约束下，最大化消费者效用：

$$\max_q V(q, Z) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \tau_i x_i(q, Z) \geq E$$

政府的拉格朗日函数

$$\mathcal{L}_G = V(q, Z) + \lambda \left[\sum_{i=1}^n \tau_i x_i(q, Z) - E \right]$$

对 q_i 的一阶条件:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial q_i} = \frac{\partial V(q, Z)}{\partial q_i} + \lambda \left[x_i(q, Z) + \sum_j \tau_j \frac{\partial x_j(q, Z)}{\partial q_i} \right] = 0$$

- 对效用的影响: $\frac{\partial V}{\partial q_i}$
- 对税收收入的影响: $x_i + \sum_j \tau_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$

对 λ 的解释

$$\frac{\partial V(q, Z, E)}{\partial E} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial E} + \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial E} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial E} - \lambda$$

- λ : 增加一单位收入要求带来的边际社会福利损失 (E 增加会使效用减少 λ)
- α : 私人收入的边际效用 (Z 增加会使效用增加 α)

最优税收条件

将 $\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\alpha x_i$ 代入一阶条件:

$$(\lambda - \alpha)x_i + \lambda \sum_j \tau_j \frac{\partial x_j(q, Z)}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

这 n 个方程构成的系统决定了最优税率 $\tau_1, \dots, \tau_n$ 。

进一步简化: 定义 θ

θ 的定义

$$\theta = (\lambda - \alpha) - \lambda \frac{\partial \sum_j \tau_j x_j}{\partial z}$$

θ 代表: 对政府而言, 引入 1 单位一次总付税的价值。

- λ : 当税收收入增加 1 单位时, 消费者效用增加 λ 。
- α : 当可支配收入减少 1 单位时, 消费者效用减少 α 。
- $\lambda \frac{\partial \sum_j \tau_j x_j}{\partial z}$: 当可支配收入减少 1 单位时, 消费束 x_j 发生变化, 导致商品税收入变化 $\frac{\partial \sum_j \tau_j x_j}{\partial z}$ 。每单位税收收入的价值为 λ 。

可以证明 $\theta > 0$ 。

从一阶条件出发:

$$(\lambda - \alpha)x_i + \lambda \sum_j \tau_j \frac{\partial x_j(q, z)}{\partial q_i} = 0$$

利用斯勒茨基方程:

$$\frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \frac{\partial h_j}{\partial q_i} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial z}$$

代入:

$$(\lambda - \alpha)x_i + \lambda \sum_j \tau_j \left(\frac{\partial h_j}{\partial q_i} - x_i \frac{\partial x_j}{\partial z} \right) = 0$$

除以 x_i 并重排：

$$(\lambda - \alpha) + \lambda \sum_j \tau_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \cdot \frac{1}{x_i} - \lambda \sum_j \tau_j \frac{\partial x_j}{\partial z} = 0$$

利用 θ 的定义：

$$\sum_j \frac{\tau_j}{x_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} = -\frac{\theta}{\lambda}$$

用价格弹性表示的最优税收

利用补偿需求导数的对称性 $\frac{\partial h_j}{\partial q_i} = \frac{\partial h_i}{\partial q_j}$ ，并注意在最优点 $h_i = x_i$ ：

$$\sum_j \frac{\tau_j}{x_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} = -\frac{\theta}{\lambda}$$

乘以并除以 q_j ：

$$\sum_j \frac{\tau_j}{q_j} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \cdot \frac{q_j}{x_i} = -\frac{\theta}{\lambda}$$

由于 $\frac{\tau_j}{q_j} = \frac{\tau_j}{1+\tau_j}$ （因为 $q_j = 1 + \tau_j$ ），我们得到：

$$\sum_j \frac{\tau_j}{1 + \tau_j} \varepsilon_{ij} = -\frac{\theta}{\lambda}$$

其中 ε_{ij} 是商品 i 对商品 j 价格的补偿交叉价格弹性：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \cdot \frac{q_j}{x_i}$$

如果交叉价格弹性为零，即对于 $i \neq j$ ， $\varepsilon_{ij} = 0$ ，则：

$$\frac{\tau_i}{1 + \tau_i} = \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{|\varepsilon_{ii}|}$$

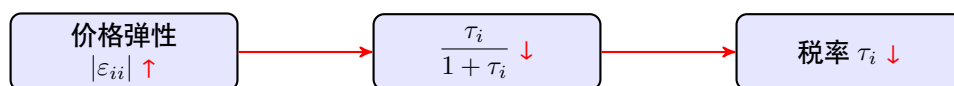


图 7.12: 价格弹性与最优税率的关系

- 价格弹性越大 $|\varepsilon_{ii}| \rightarrow$ 更小的 $\frac{\tau_i}{1+\tau_i} \rightarrow$ 更小的税率 τ_i
- 这就是最优税收中经典的**反弹性法则**：需求弹性越大的商品，税率应越低，以最小化超额负担。

7.2.3 逆弹性法则的局限性

- **反弹性法则**：对需求缺乏弹性的商品征收更高的税。
- **局限性**：只考虑效率，忽略了公平问题。

- 与奢侈品相比，必需品的弹性通常更低。
- 因此，Ramsey 最优商品税很可能是累退的，即穷人面临更高的税率。
- Diamond (1975) 扩展了 Ramsey 模型，纳入了分配考量。

7.2.4 特殊情形：两种产品

- 假设只有两种商品， x_1 和 x_2 。
- 令闲暇为商品 x_0 。将闲暇包括在内，共有三种商品。
- 根据之前的推导，最优税率满足：

$$\sum_j \frac{\tau_j}{1 + \tau_j} \varepsilon_{ij} = -\frac{\theta}{\lambda}, \quad i = 1, 2$$

因此：

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} \varepsilon_{11} + \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} \varepsilon_{12} &= -\frac{\theta}{\lambda} \\ \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} \varepsilon_{21} + \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} \varepsilon_{22} &= -\frac{\theta}{\lambda} \end{aligned}$$

求解：

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}) \\ \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}) \end{aligned}$$

其中 $S = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} > 0$ 。

由补偿需求弹性的性质：

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{10} = 0$$

$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{20} = 0$$

那么，我们可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{20}) \\ \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} + \varepsilon_{10}) \end{aligned}$$

- 如果 $\varepsilon_{20} > \varepsilon_{10}$ ，则 $\tau_1 > \tau_2$ 。
- $\varepsilon_{20} > \varepsilon_{10}$ 意味着，与商品 2 相比，商品 1 与闲暇有更大的替代效应。
- 对与闲暇互补的商品应课以更重的税。(Corlett and Hague, 1953)

如果所有商品都能被征税

假设效用函数中不包含闲暇，即只有两种商品，且两者均可被征税。

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{12} - \varepsilon_{22}) \\ \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} &= \frac{\theta}{S\lambda} (\varepsilon_{21} - \varepsilon_{11}) \end{aligned}$$

由补偿弹性的性质：

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = 0$$

因此：

$$\frac{\tau_1}{1 + \tau_1} = \frac{\theta}{S\lambda}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})$$

$$\frac{\tau_2}{1 + \tau_2} = \frac{\theta}{S\lambda}(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})$$

- 这意味着 $\tau_1 = \tau_2$ 。
- 如果所有商品（包括闲暇）都能被征税，那么均一税是最优的。

关键点

Ramsey 最优商品税：

模型设定

- **生产者：** n 种商品，生产者价格固定为 1（供给完全弹性）。若对商品 i 的税率为 τ_i ，则消费者价格为 $q_i = 1 + \tau_i$ 。
- **家庭：** 一个代表性家庭，其效用取决于 n 种商品的消费和劳动供给。给定消费者价格 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 、工资率 w 和非劳动收入 Z ，家庭选择最优劳动供给和消费束以最大化效用：

$$\max_{x_1, \dots, x_n, l} U(x_1, x_2, \dots, x_n, l)$$

$$\text{s.t. } q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n \leq wl + Z$$

- **政府：** 对商品征税以筹集收入 E 。最优税收的目标是在收入约束下，最大化代表性家庭的效用。

基本结果

- **逆弹性法则：** 对需求更缺乏弹性的商品征收更高的税，以最小化超额负担。

附录 A 习题集

第 A 章 练习

本习题集涵盖公共经济学与福利理论的核心主题，包括福利经济学第一定理、外部性、公共物品、机制设计、逆向选择、道德风险、养老金经济学、税收归宿以及超额负担。

问题 1: 福利经济学第一基本定理

在一个纯交换的完全竞争市场中，有两位消费者 A 和 B，两种商品 X 和 Y。初始时，A 拥有 3 单位 X 和 8 单位 Y，B 拥有 1 单位 X 和 8 单位 Y。他们的效用函数分别为： $U(X_A, Y_A) = X_A Y_A$ 和 $U(X_B, Y_B) = X_B Y_B$ 。求：

1. 竞争市场均衡下的（相对）价格以及每人每种商品的消费量。
2. 代表所有帕累托最优配置的契约曲线方程。竞争市场均衡是否位于契约曲线上？
3. 竞争市场均衡是否总是帕累托最优的？请直观地解释。

问题 2: 外部性

在一个完全竞争市场中，有一个代表性消费者，其效用函数为 $u(x; P) = \frac{1}{2} \ln x + y - \frac{3}{2}P$ ，其中 x 代表汽车数量， y 是所有其他商品的消费， P 是空气污染水平。消费者的收入为 100。

一家汽车制造商拥有成本函数 $c(x) = x^2$ 。假设每生产一单位汽车就会产生一单位空气污染。

1. 在完全竞争市场中，汽车的产量是多少？
2. 社会最优的汽车产量是多少？
3. 在竞争市场中，对汽车征收多少从量税才能实现社会最优结果？

问题 3: 萨缪尔森规则与林达尔价格

假设有两位代表性消费者 A 和 B，他们只消费两种商品 X 和 G。他们的效用函数是拟线性的： $u_A(X, G) = X + \ln G$ ， $u_B(X, G) = X + 2 \ln G$ 。A 和 B 的收入分别为 $I_A = 40$ 和 $I_B = 60$ 。生产可能性边界由 $X + 3G = 100$ 给出。

1. 如果 X 和 G 都是私人物品，求两种商品的帕累托有效数量。
2. 如果 X 是私人物品而 G 是公共物品，求两种商品的帕累托有效数量。
3. 如果 G 是公共物品，求林达尔均衡。具体来说，A 和 B 每单位公共物品各支付多少？提供的公共物品数量是多少？（提示：在完全竞争市场中，X 的价格为 1，G 的价格为 3。）

问题 4: 克拉克机制设计

假设一栋房子有三名住户：A、B 和 C。政府正考虑为这栋房子安装自来水。假设从自来水中获得的效用分别为 $u_A = 4000$ ， $u_B = 5000$ ， $u_C = 11000$ （均以货币单位衡量）。安装成本为 $c = 18000$ ，由三人平均分摊，因此每人支付 6000。决策方式为询问 A、B、C 报告其净收益 s_i 。如果 $s_A + s_B + s_C > 0$ ，则安装自来水。

1. 从社会角度看，安装自来水是否划算？
2. 给定 B 和 C 都说真话，即 $s_B = -1000, s_C = 5000$ ，A 说真话还是说谎是最优的？（此处假定不征收克拉克税。）
3. 现假设实施克拉克税机制。证明：
 - (a). 若 B 和 C 说真话，说真话是 A 的（一个）最优策略。
 - (b). 若 B 和 C 说谎（例如， $s_B = -500, s_C = 1000$ ），说真话仍是 A 的（一个）最优策略。

问题 5: 医疗保险与逆向选择

假设有两位代表性消费者 L 和 H。两人的效用函数均为 $U(C) = \sqrt{C}$ ，其中 C 是扣除医疗开支后的消费。他们的初始财富为 3600。L 是低风险个体，患病概率为 20%。H 是高风险个体，患病概率为 30%。如果患病，医疗开支为 1100。每个人都知道自己的患病概率。

1. 假设 L 和 H 都可以购买全额医疗保险，L 愿意为保险支付的最高金额是多少？H 愿意的最高金额是多少？
2. 在完美信息下，保险公司能够区分低风险和高风险个体。L 和 H 的公平保费分别是多少？谁会购买保险？
3. 在信息不对称下，保险公司无法区分风险类型，但知道市场中低风险个体的比例。
 - (a). 假设市场由 50% 的低风险个体和 50% 的高风险个体组成。如果每个人都购买保险，公平保费是多少？在得知此保费后，L 和 H 都会购买保险吗？
 - (b). 假设市场由 90% 的低风险个体和 10% 的高风险个体组成。如果每个人都购买保险，公平保费是多少？在得知此保费后，L 和 H 都会购买保险吗？
4. 从信息不对称的角度讨论社会保险存在的理由。

问题 6: 医疗保险与道德风险

一个代表性消费者的效用函数为 $U(C) = \sqrt{C}$ ，其中 C 是扣除医疗开支后的消费。其收入为 6400。若不采取预防措施，有 0.7 的概率患病，届时将产生 4800 的医疗开支。该家庭可以采取预防措施（例如，戒烟、加强锻炼），成本为 1500，这会将患病概率降至 0.2。该家庭可以选择是否购买全额医疗保险。假设是否采取预防措施是私人信息，保险公司无法观察到。

1. 在没有保险的情况下，如果该家庭采取预防措施，期望效用是多少？如果不采取，期望效用是多少？该家庭会采取预防措施吗？
2. 假设该家庭现在可以购买全额医疗保险。根据过往经验，保险公司认为该家庭是低风险的，并按低患病概率收取公平保费。该家庭会购买保险吗？购买保险后，它还会采取预防措施吗？
3. 在了解该家庭购买保险后的行为后，保险公司还会按低风险概率收取公平保费吗？如果不会，新的公平保费是多少？该家庭还会购买保险吗？
4. 保险公司可以采取哪些措施来缓解道德风险？

问题 7: 养老金经济学与劳动供给

在一个两期模型中，一个短视的消费者只关心第一期的效用。其效用函数为 $u(c) + h(1-l)$ ，其中 c 和 l 分别代表消费和劳动供给。单位劳动工资为 w ，养老金缴费率为 τ 。

1. 假设效用函数形式为 $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ 且 $h(1-l) = 1-l$ 。养老金制度如何影响劳动供给？
2. 直观地解释养老金制度对劳动供给的两种效应。

问题 8: 局部均衡中的税收归宿 (1)

在一个完全竞争市场中, 某商品的需求函数为 $Q = 4000 - 100P$, 供给函数为 $Q = -200 + 100P$ 。

1. 求均衡价格和数量。
2. 如果对该商品征收 \$2 的消费税, 生产者和消费者各自承担多少税负?
3. 哪一方承担了更多的税负, 消费者还是生产者? 为什么?

问题 9: 局部均衡中的税收归宿 (2)

在一个完全竞争市场中, 某商品的需求函数为 $Q = a - bP$, 供给函数为 $Q = c + dP$, 其中 $b, d > 0$ 。假设 $b > d$ 。

1. 求均衡价格和数量。
2. 在均衡价格和数量下, 需求价格弹性和供给价格弹性哪个更大?
3. 如果对该商品征收 \$t 的消费税, 消费者和生产者各自承担多少税负?
4. 哪一方承担了更多的税负? 请提供直观的解释。
5. 如果 $d = 0$, 税收归宿如何? 请提供直观的解释。

问题 10: 一般均衡中的税收归宿

在一个两种商品的完全竞争市场中, 商品 X 的生产函数为 $X = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, 商品 Y 的生产函数为 $Y = K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ 。代表性家庭拥有 1 单位劳动和 1 单位资本, 效用函数为 $U(X, Y) = XY$ 。

1. 求均衡的要素价格和产品价格。
2. 如果政府对商品 Y 征收 50% 的从价税 (外税), 并将全部税收收入作为一次性转移支付返还给代表性家庭, 新的均衡要素价格和产品价格是多少?
3. 直观地解释征税后要素价格的变化。

问题 11: 用等价性变化与补偿性变化衡量超额负担

假设一个消费者只消费两种商品, 效用函数为 $u(x, y) = xy$ 。市场价格为 $P = (2, 1)$, 即 X 的价格为 2, Y 的价格为 1。消费者的收入为 $m = 80$ 。假设供给弹性无穷大, 因此全部税负都转嫁给了消费者。

1. 假设政府对商品 Y 征收每单位 \$1 的从量税。分别用等价性变化和补偿性变化计算该税的超额负担。
2. 假设政府同时对商品 X 征收每单位 \$2 的从量税, 并对商品 Y 征收每单位 \$1 的从量税。分别用等价性变化和补偿性变化计算此税收组合的超额负担。

附录 B 基本数学工具

本附录包括了中级公共经济学用到的一些基本数学工具，我们扼要论述了拉格朗日方法在经济优化问题中的使用，计量线性回归时的系数含义，隐函数求导法则，求和算子的各种性质及经典的柯布道格拉斯函数的性质。要理解本书的大部分内容，微积分和计量经济学并非必需，但在一些章节还是用到了相应的简单概念。如若想要深刻理解的某些高深专题（如一般均衡和最优税），需要研读微观经济学的中级或高级教材，并结合数理经济学的内容进行学习，以加深经济建模与数理推导的能力。

B.1 拉格朗日方法在经济学优化中的应用

在经济学中，许多重要的决策问题涉及在资源约束、预算限制或技术可行性条件下最大化或最小化某个目标函数（如效用、利润或成本）。拉格朗日乘子法（Lagrange multiplier method）是处理这类约束优化问题的核心工具。本附录系统地介绍该方法，包括等式约束、不等式约束以及相关的经济解释。

B.1.1 无约束优化回顾

对于一个可微的目标函数 $f(\mathbf{x})$ ，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ，无约束极值点（局部最大值或最小值）的一阶必要条件是梯度为零向量：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{即} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall i.$$

二阶充分条件涉及海森矩阵（Hessian）的正定性（局部极小）或负定性（局部极大）。

B.1.2 等式约束下的拉格朗日方法

考虑如下优化问题：

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to} \quad g(\mathbf{x}) = c,$$

其中 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是可微函数， c 为常数。假设约束是紧的，且 $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ 在可行域上成立。

拉格朗日函数定义为：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda(g(\mathbf{x}) - c),$$

其中 λ 称为拉格朗日乘子（Lagrange multiplier）。一阶必要条件（局部极值点）为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(g(\mathbf{x}) - c) = 0 \quad \text{即} \quad g(\mathbf{x}) = c. \end{aligned}$$

经济解释

在经济学中，拉格朗日乘子 λ 度量约束松紧的价值。具体地，若 f 是效用函数、 g 是预算约束（收入为 c ），则 λ 表示收入的边际效用（影子价格）。一般地，在最优解处有：

$$\lambda^* = \left. \frac{\partial f}{\partial c} \right|_{c=g(\mathbf{x}^*)},$$

即目标函数关于约束常数的边际变化。

二阶条件：加边海森矩阵

对于等式约束问题，二阶充分条件基于**加边海森矩阵 (bordered Hessian)**：

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

如果所有以 $2m+1$ ($m=1, \dots, n-1$) 阶顺序主子式交替符号 (从负开始)，且最后一个主子式符号为 $(-1)^n$ ，则约束极值点是局部极大值；若这些主子式全部为负，则是局部极小值 (具体符号规则视教材定义略有差异，核心是验证拉格朗日函数在约束切空间上的曲率)。

B.1.3 多个等式约束

对于 m 个约束 $g_j(\mathbf{x}) = c_j$, $j=1, \dots, m$ ($m < n$)，拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - c_j).$$

一阶条件：对所有 i 有 $\partial \mathcal{L} / \partial x_i = 0$ ，且对所有 j 有 $g_j(\mathbf{x}) = c_j$ 。二阶条件则需检查边界海森矩阵 (大小为 $(n+m) \times (n+m)$) 的适当符号模式。

B.1.4 不等式约束与库恩-塔克条件

在经济学中，约束通常是不等式的，例如 $g(\mathbf{x}) \leq c$ (资源使用不超过可用量)。考虑标准形式的约束优化：

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{subject to} \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, \dots, m,$$

以及可能的非负性条件 $x_j \geq 0$ 。引入拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(\mathbf{x}),$$

其中 $\mu_i \geq 0$ 是库恩-塔克乘子。一阶必要条件 (库恩-塔克条件, Kuhn-Tucker conditions) 为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \geq 0, \quad x_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\mu_i \geq 0, \quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \mu_i g_i(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{B.2})$$

条件 (B.1) 处理变量的非负约束 (若 x_j 没有非负性要求，则等式为零)；条件 (B.2) 为互补松弛性 (complementary slackness)。

经济解释：乘子 μ_i 可以视为约束 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ 的“影子价格”。如果约束是非紧的 ($g_i < 0$)，则 $\mu_i = 0$ ；如果约束是紧的 ($g_i = 0$)，则 $\mu_i > 0$ 表示放松该约束一个单位对目标函数的最大改善程度。

经济学应用示例

消费者效用最大化：消费者在预算约束下最大化效用 $U(x_1, x_2)$, $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$, $x_1, x_2 \geq 0$ 。拉格朗日函数为：

$$\mathcal{L} = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2.$$

库恩-塔克条件导出典型的内点解条件：

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \lambda p_2,$$

以及预算约束紧 ($p_1 x_1 + p_2 x_2 = I$)。这里 λ 是收入的边际效用。

成本最小化：给定产量约束 $f(\mathbf{x}) \geq y$ ，最小化成本 $C = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}$ 。拉格朗日方法给出条件：

$$w_i = \mu \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \mu \geq 0,$$

其中 μ 是边际成本（拉格朗日乘子的经济含义为影子价格）。

小结

拉格朗日方法将约束优化问题转化为无约束极值问题，通过引入乘子捕捉约束的价值。它在消费者理论、生产者理论、一般均衡、增长模型以及机制设计等领域无处不在。掌握拉格朗日方法及其推广（库恩-塔克条件）是深入学习现代经济学数学基础的必要步骤。

B.2 线性回归模型中的系数解释

在实证经济学中，线性回归是最基础的计量工具。然而，对于变量是否取对数（自然对数），回归系数 β_1 的经济含义截然不同。本附录系统梳理四种常见情形：水平-水平、对数-水平、水平-对数、对数-对数模型，并给出严格的数学推导与解释。

B.2.1 水平-水平模型 (Level-Level)

模型形式：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon,$$

其中 ε 为随机误差项（通常假定 $\mathbb{E}[\varepsilon|x] = 0$ ）。此时系数 β_1 的解读为：

$$\beta_1 = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

即 x 变化一个单位时， y 的绝对变化量。如果 x 增加 1 单位，则 y 平均变化 β_1 单位。

B.2.2 对数-水平模型 (Log-Level)

模型形式：

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon.$$

对 x 求偏导：

$$\frac{\partial \ln y}{\partial x} = \beta_1 \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1 y.$$

因此， x 变化一个单位时， y 的百分比变化近似为 $100 \cdot \beta_1 \%$ （当 β_1 较小时精确度较高）。更精确的解释： x 增加 1 单位， y 变为原来的 e^{β_1} 倍。因为：

$$\ln y_{\text{new}} - \ln y_{\text{old}} = \beta_1 \cdot 1 \Rightarrow \frac{y_{\text{new}}}{y_{\text{old}}} = e^{\beta_1}.$$

故 y 的精确相对变化为 $e^{\beta_1} - 1$ 。

B.2.3 水平-对数模型 (Level-Log)

模型形式：

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon.$$

求导：

$$\frac{\partial y}{\partial \ln x} = \beta_1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} \cdot x = \beta_1 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\beta_1}{x}.$$

解释： x 增加 1% 时， y 的绝对变化量约为 $\frac{\beta_1}{100}$ 单位。因为当 x 变动 1% 时， $\Delta \ln x \approx 0.01$ ，所以：

$$\Delta y \approx \beta_1 \cdot 0.01 = \frac{\beta_1}{100}.$$

换句话说， β_1 表示 x 变化 100%（即翻倍）时 y 的变化量。

B.2.4 对数-对数模型 (Log-Log)

模型形式：

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon.$$

求导：

$$\frac{\partial \ln y}{\partial \ln x} = \beta_1 \Rightarrow \frac{\partial y/y}{\partial x/x} = \beta_1.$$

因此 β_1 是 y 关于 x 的弹性 (elasticity)： x 变化 1%， y 变化的百分比（近似）。精确解释：

$$\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} \rightarrow \beta_1 \quad (\text{当变化很小时}).$$

或者从指数形式看： $y = e^{\beta_0} x^{\beta_1} e^{\varepsilon}$ ，故 β_1 为幂指数，刻画了 y 对 x 的常弹性。

B.2.5 总结与对照表

下表汇总四种情形的解释（忽略误差项）：

模型形式	回归方程	β_1 的含义
水平-水平	$y = \beta_0 + \beta_1 x$	当 x 增加 1 单位时的 Δy
对数-水平	$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$	当 x 增加 1 单位时， y 变化的百分比 ($\approx 100\beta_1\%$)
水平-对数	$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$	当 x 增加 1% 时， Δy 约为 $\beta_1/100$
对数-对数	$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$	弹性： x 增加 1% 时 y 增加 $\beta_1\%$

B.2.6 注意事项与示例

1. 在经验研究中，取对数常可处理异方差性或使变量分布更接近正态。
2. 对数-对数模型的系数直接给出弹性，常用于需求、生产函数等常弹性设定。
3. 当被解释变量为正且右偏时，常使用对数变换；解释变量取对数可反映边际效应递减（水平-对数模型）。
4. 注意变量范围，若对数化部分存在零值，此时可考虑使用 Poisson 回归等（可参加 QJE 中 [Chen & Roth, 2024](#)）。

示例

假设估计得到 $\ln \hat{y} = 0.5 + 0.8 \ln x$ ，则：当 x 增加 1%， y 增加 0.8%（弹性为 0.8）。

若估计得到 $\hat{y} = 10 + 2 \ln x$ ，则： x 从 100 增加到 101（增加 1%）， y 约增加 $2 \times 0.01 = 0.02$ 单位。

B.3 隐函数求导

在经济学中，许多均衡关系（如市场出清条件、契约曲线、税收归宿分析）无法将因变量显式解为自变量的函数，而是通过一个方程隐式地定义。隐函数求导法则提供了直接计算导数的方法。

B.3.1 单方程情形

设二元函数 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 附近满足 $F(x_0, y_0) = 0$ ，且 F 连续可微， $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 。则存在隐函数 $y = f(x)$ 使得 $F(x, f(x)) = 0$ ，且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

推导：对 $F(x, y) = 0$ 两边关于 x 求全导数（视 y 为 x 的函数）：

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}.$$

B.3.2 多变量情形

若 $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ 且 $\partial F / \partial y \neq 0$ ，则隐函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 的偏导数为：

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial y}.$$

B.3.3 示例：税收归宿中的隐函数求导

以典型的竞争市场税收归宿分析为例。设需求函数 $D(p)$ 与供给函数 $S(p)$ ，初始均衡 $D(p) = S(p)$ 。政府对每单位商品征收从量税 t （向消费者征收或向生产者征收在竞争市场中等价），税后均衡条件为：

$$D(p_d) = S(p_s), \quad p_d = p_s + t,$$

其中 p_d 为消费者支付价格， p_s 为生产者实际获得价格。消去 p_d 得：

$$D(p_s + t) = S(p_s).$$

该方程隐式定义了 p_s 作为 t 的函数： $F(p_s, t) = D(p_s + t) - S(p_s) = 0$ 。应用隐函数求导：

$$\frac{dp_s}{dt} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial p_s}} = -\frac{D'(p_s + t)}{D'(p_s + t) - S'(p_s)}.$$

由于分母通常为负（需求向下倾斜 $D' < 0$ ，供给向上倾斜 $S' > 0$ ），得到：

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{D'}{D' - S'} = \frac{\text{需求斜率}}{\text{需求斜率} - \text{供给斜率}}.$$

消费者支付价格的变化为：

$$\frac{dp_d}{dt} = \frac{dp_s}{dt} + 1 = \frac{S'}{D' - S'}.$$

税收归宿比例：消费者承担份额为 $\frac{dp_d}{dt} = \frac{S'}{S' - D'}$ ，生产者承担份额为 $1 - \frac{dp_d}{dt} = \frac{-D'}{S' - D'}$ 。经典结论：供需弹性越小的一方承担更多税收。

小结

隐函数求导允许我们在未知函数显式时计算边际变化，其核心公式 $dy/dx = -F_x/F_y$ 是分析一般均衡、比较静态的核心工具。

B.4 求和算子与描述统计量

求和算子 (summation operator) 是用以表达多个数求和运算的一个缩略符号, 它在统计学和计量经济学分析中扮演着重要作用。如果 $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 为 n 个观测值构成的序列, 则这些数的和定义为:

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

其中 i 称为求和下标 (通常从 1 开始, 也可从 0 或任意整数开始), n 为求和上界。当求和范围明确时, 可简写为 $\sum_i x_i$ 。

B.4.1 求和算子的基本性质

设 a 为常数, $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 为两个数据序列, 则以下性质成立:

1. 常数求和: $\sum_{i=1}^n a = n \cdot a.$
2. 线性性质 (齐次性): $\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i.$
3. 线性性质 (可加性): $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i.$
4. 分组求和: $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i.$
5. 平方和展开: $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2.$
6. 常数因子分离: $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$, 其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (样本均值)。该性质常用于方差推导。

B.4.2 样本均值 (Sample Mean)

样本均值是描述数据中心趋势的最基本统计量, 定义为:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

利用求和算子的线性性质, 容易验证样本均值满足:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n x_i - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0.$$

B.4.3 样本方差与标准差

样本方差度量数据围绕均值的离散程度。为避免估计偏差 (无偏性), 通常采用自由度为 $n - 1$ 的版本:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

使用求和算子可展开为计算形式:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2.$$

样本标准差 $s_x = \sqrt{s_x^2}$ 。

B.4.4 样本协方差与相关系数

协方差度量两个变量之间的线性相关方向与强度。样本协方差定义为：

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

利用求和算子展开：

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right).$$

Pearson 相关系数（样本）为标准化协方差：

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

其取值范围为 $[-1, 1]$, $r_{xy} = 1$ 表示完全正相关, -1 表示完全负相关, 0 表示无线性关系。

B.4.5 双重求和与交叉项

在处理面板数据或双下标数据（如 x_{ij} ）时，需使用双重求和算子：

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right).$$

一个重要性质是：如果 $\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}$, $\bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{ij}$, 则总离差平方和可分解为组内平方和与组间平方和（ANOVA 基础）。

B.4.6 应用示例：简单线性回归中的求和算子

在简单线性回归模型 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ 中，普通最小二乘估计量可表示为：

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}.$$

可见求和算子是推导与表达回归估计量的核心工具。

小结

求和算子提供了处理数据加总的有力符号系统，配合其代数性质可简洁推导出所有常用描述统计量。熟练掌握求和算子及其变换是学习概率论、数理统计和计量经济学的必要基础。

B.5 柯布-道格拉斯函数

柯布-道格拉斯函数（Cobb-Douglas function）是经济学中最常用的生产函数与效用函数形式之一，由 Charles Cobb 与 Paul Douglas 于 1928 年提出。其简洁的数学结构与良好的经济性质使其在增长理论、产业组织及微观经济学中广泛应用。

B.5.1 定义

两要素柯布-道格拉斯生产函数的标准形式为：

$$Y = AK^\alpha L^\beta,$$

其中 Y 为产出, K 为资本投入, L 为劳动投入, $A > 0$ 为全要素生产率 (技术水平), $\alpha > 0$ 与 $\beta > 0$ 分别为资本与劳动的产出弹性。在规模报酬不变的常见假设下, $\alpha + \beta = 1$, 则函数可写为:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}.$$

更一般地, n 种投入的柯布-道格拉斯形式为:

$$Y = A \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ (常数规模报酬)}.$$

B.5.2 基本性质

1. 齐次性

柯布-道格拉斯函数是 $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ 次齐次函数。即对任意 $t > 0$:

$$A \prod_{i=1}^n (tX_i)^{\alpha_i} = t^{\sum \alpha_i} A \prod_{i=1}^n X_i^{\alpha_i} = t^{\sum \alpha_i} Y.$$

- 若 $\sum \alpha_i = 1$: 规模报酬不变 (CRS)。
- 若 $\sum \alpha_i > 1$: 规模报酬递增 (IRS)。
- 若 $\sum \alpha_i < 1$: 规模报酬递减 (DRS)。

2. 边际产出递减

资本与劳动的边际产出分别为:

$$MP_K = \frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1} L^\beta = \alpha \frac{Y}{K},$$

$$MP_L = \frac{\partial Y}{\partial L} = \beta AK^\alpha L^{\beta-1} = \beta \frac{Y}{L}.$$

由于 $\alpha, \beta < 1$ (假设规模报酬不变时), 边际产出关于该要素本身是递减的:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^\beta < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \beta(\beta-1)AK^\alpha L^{\beta-2} < 0.$$

3. 要素产出弹性

产出对资本与劳动的弹性定义为:

$$\varepsilon_{Y,K} = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = \alpha, \quad \varepsilon_{Y,L} = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = \beta.$$

这意味着 α 和 β 直接度量了产出对要素变化的敏感度, 且为常数 (与要素投入水平无关), 这是柯布-道格拉斯函数的重要特征——常弹性。

4. 替代弹性

要素之间的替代弹性 (Elasticity of Substitution) 定义为:

$$\sigma = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln(MP_L/MP_K)}.$$

对于柯布-道格拉斯函数, 边际技术替代率 (MRTS) 为:

$$MRTS_{L,K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\beta K}{\alpha L}.$$

因此：

$$\ln(K/L) = \ln(\alpha/\beta) + \ln(MP_L/MP_K).$$

对上述求导可得 $\sigma = 1$ 。即柯布-道格拉斯函数的替代弹性恒为 1，意味着要素比例对边际技术替代率变化的响应是单位弹性。

5. 对数线性形式

对原始函数取自然对数得到线性形式：

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L + (\text{误差项}).$$

这一性质使得柯布-道格拉斯函数可通过普通最小二乘法（OLS）进行参数估计，系数 α, β 直接解读为弹性。

6. 欧拉定理 (Euler's Theorem)

如果函数是 r 次齐次的，则满足欧拉方程：

$$K \frac{\partial Y}{\partial K} + L \frac{\partial Y}{\partial L} = rY.$$

对于规模报酬不变的柯布-道格拉斯函数 ($r = 1$)：

$$K \cdot MP_K + L \cdot MP_L = Y.$$

在经济上，若各要素按其边际产出支付报酬，则总产出恰好被完全分配（产品分配净尽定理）。

7. 凹性与拟凹性

- 当 $\alpha + \beta \leq 1$ 且 $\alpha, \beta > 0$ 时，柯布-道格拉斯函数是凹函数（海森矩阵负半定）。
- 对于生产函数，通常只要求拟凹性（偏好凸性），柯布-道格拉斯函数在定义域内既是凹的也是拟凹的（在 CRS 或 DRS 下）。

B.5.3 应用示例：效用最大化与需求函数

考虑消费者效用函数 $U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ ，预算约束 $p_x x + p_y y = I$ 。通过拉格朗日法解得马歇尔需求：

$$x^* = \alpha \frac{I}{p_x}, \quad y^* = (1 - \alpha) \frac{I}{p_y}.$$

支出份额为常数： $\frac{p_x x^*}{I} = \alpha$ ， $\frac{p_y y^*}{I} = 1 - \alpha$ 。这体现了柯布-道格拉斯函数在消费者理论中的简洁性——线性支出系统（LES）。

小结

柯布-道格拉斯函数因其常弹性、齐次性、对数线性形式以及 $\sigma = 1$ 的替代弹性而成为经济学模型的基础设定。尽管其严谨性受到某些批评（如替代弹性不一定为 1），但作为入门与基准模型，它在教学与应用研究中仍占据核心地位。